2. *Déterminer le nombre d'anagrammes du mot KAYAK.*

Théorème 2.18. *(i)* $\forall n, p \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(ii) $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}, p\binom{n}{p} = (n-p+1)\binom{n}{p-1}$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(v) Triangle de Pascal. $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

(vi) Binôme de Newton. $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, (x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$.

3. Groupe symétrique

3.1 Éléments du groupe symétrique

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 3.1 (Groupe symétrique)**.** *Le groupe symétrique, noté $\mathfrak{S}_n$, est l'ensemble des permutations de $[1, n]$. $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe de cardinal $n!$. Si $n \geq 3$, ce groupe est non commutatif.*

Remarque 3.2 (Notation)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Exercice 3.3. *Décrire l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.*

Définition 3.4 (Transposition)**.** *Une transposition de $\mathfrak{S}_n$ est une permutation θ telle qu'il existe $i, j \in [1, n]$ satisfaisant $i \neq j, \theta(i) = j$ et $\theta(j) = i$ pour tout entier k différent de $i, j, \theta(k) = k$. On note $\theta = (i, j)$.*

Exercice 3.5. *Déterminer les transpositions de $\mathfrak{S}_3$.*

Proposition 3.6. *Les transpositions sont des applications involutives.*

Définition 3.7 (Cycle)**.** *Soient $p \geq 2$ et $A = \{a_1, \ldots, a_p\} \subset [1, n]$. Soit σ la permutation définie par $\sigma(x) = x, \forall x \notin A$ et $\sigma(a_i) = a_{i+1}, \forall i \in [1, p-1], \sigma(a_p) = a_1$. σ est appelé cycle de longueur p de support A. On note $\sigma = (a_1, \cdots, a_p)$.*

Exercice 3.8 (Ordre d'un cycle)**.** 1. *Déterminer les cycles de $\mathfrak{S}_3$.*

2. *Soit c un cycle de longueur p. Montrer que* $\min\{i \in [1, n] : c^i = Id_{[1,n]}\} = p$.

Proposition 3.9. *Montrer que si c et c' sont deux cycles à support disjoints de $\mathfrak{S}_n$, alors c et c' commutent.*

3.2 Décompositions

Lemme 3.10. *Soit $n \geq 2$ et $\varphi : \mathfrak{S}_{n-1} \to \mathfrak{S}_n, \sigma \mapsto (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n-1), n)$. φ est un morphisme de groupes et $\varphi(\mathfrak{S}_{n-1}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(n) = n\}$.*

Théorème 3.11 (Décomposition)**.** *Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de transpositions.*

Exercice 3.12. *Soit c un cycle. Donner une décomposition de c en produit de transpositions.*

Définition 3.13 (Orbite)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $x \in [1, n]$. L'orbite de x est l'ensemble $\{\sigma^p(x), p \in \mathbb{N}\}$.*

Exercice 3.14.

1. *Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer l'orbite de chacun des entiers de $[1, 6]$.*
2. *Montrer qu'il existe un entier $p \in [1, n]$ tel que l'orbite de k soit $\{\sigma^\ell(k), \ell \in [0, p-1]\}$.*

Proposition 3.15. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Les orbites de σ forment une partition de $[1, n]$. On notera $o(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.*

Théorème 3.16. *Toute permutation se décompose comme un produit de cycles à supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

Exercice 3.17. *Décomposer la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 2 & 4 & 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints.*

3.3 Signature d'une permutation

Définition 3.18 (Signature)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La signature de σ, notée $\varepsilon(\sigma)$, est le nombre $(-1)^{n-o(\sigma)}$.*

Exercice 3.19. *Soit θ une transposition de $\mathfrak{S}_n$. Déterminer la signature de θ.*

Théorème 3.20 (Morphisme)**.** *L'application ε est un morphisme du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans le groupe $\{(-1, 1), \times\}$.*

Exercice 3.21 (Inversions)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le nombre d'inversions de σ, noté $I(\sigma)$, est le cardinal de $\{(i, j) : i < j \text{ ET } \sigma(j) < \sigma(i)\}$. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}, i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = (-1)^{I(\sigma)}$.*

Corollaire 3.22. *Le nombre de transpositions dans la décomposition d'une permutation est de parité constante.*

Exercice 3.23 (Groupe alterné)**.** *L'ensemble $\mathfrak{A}_n = Ker(\varepsilon)$ est le groupe alterné d'ordre n.*

1. *Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est un groupe.*
2. *Soit $n \geq 2$. Montrer que $|\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}$.*