Exercice 2.7. *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.*

1. *Déterminer le nombre de couples (x, y) de $[1, n]^2$ tels que $x \neq y$.*
2. *Soit E un alphabet contenant p lettres. Déterminer le nombre de mots de n lettres pouvant être formés avec l'alphabet E qui ne contiennent jamais deux lettres consécutives identiques.*

Proposition 2.8 (Applications)**.** *$\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et $|\mathcal{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$.*

Exercice 2.9. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Déterminer le nombre d'applications de $[1, n]$ dans $[1, n]$.*
2. *Déterminer le nombre de façons de tirer successivement 5 boules avec remise dans une urne contenant n boules numérotées.*
3. *Déterminer le nombre de mots de 5 lettres pouvant être construits avec un alphabet constitué des lettres du mot KAYAK.*

Corollaire 2.10.

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

2.2 Arrangements

Définition 2.11 (Arrangements)**.** *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel. Un arrangement de longueur p d'éléments de E est une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts. On note A_n^p le nombre d'arrangements de E de longueur p.*

Proposition 2.12. *Pour tous n, $p \in \mathbb{N}$,*

$$A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2.13. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de façons de tirer successivement 5 boules sans remise dans une urne contenant n boules numérotées.*

Théorème 2.14. *Soient E un ensemble de cardinal p et F un ensemble de cardinal n.*

(i) Il y a A_n^p injections de E dans F.

(ii) Si $p = n$, il y a $n!$ bijections de E dans F. Les bijections de E sont appelées des permutations.

2.3 Combinaisons

Définition 2.15 (Combinaisons)**.** *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel. Une combinaison de p éléments de E est une partie de E de cardinal p. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E.*

Proposition 2.16. *Pour tous n, $p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.*

Exercice 2.17. 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de façons de tirer simultanément 5 boules sans remise dans une urne contenant n boules numérotées.*

2. *Déterminer le nombre d'anagrammes du mot KAYAK.*

Théorème 2.18. *(i)* $\forall n, p \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(ii) $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}, p\binom{n}{p} = (n-p+1)\binom{n}{p-1}$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(v) Triangle de Pascal. $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

(vi) Binôme de Newton. $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, (x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$.

3. Groupe symétrique

3.1 Éléments du groupe symétrique

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 3.1 (Groupe symétrique)**.** *Le groupe symétrique, noté $\mathfrak{S}_n$, est l'ensemble des permutations de $[1, n]$. $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe de cardinal $n!$. Si $n \geq 3$, ce groupe est non commutatif.*

Remarque 3.2 (Notation)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Exercice 3.3. *Décrire l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.*

Définition 3.4 (Transposition)**.** *Une transposition de $\mathfrak{S}_n$ est une permutation θ telle qu'il existe $i, j \in [1, n]$ satisfaisant $i \neq j, \theta(i) = j$ et $\theta(j) = i$ pour tout entier k différent de $i, j, \theta(k) = k$. On note $\theta = (i, j)$.*

Exercice 3.5. *Déterminer les transpositions de $\mathfrak{S}_3$.*

Proposition 3.6. *Les transpositions sont des applications involutives.*

Définition 3.7 (Cycle)**.** *Soient $p \geq 2$ et $A = \{a_1, \ldots, a_p\} \subset [1, n]$. Soit σ la permutation définie par $\sigma(x) = x, \forall x \notin A$ et $\sigma(a_i) = a_{i+1}, \forall i \in [1, p-1], \sigma(a_p) = a_1$. σ est appelé cycle de longueur p de support A. On note $\sigma = (a_1, \cdots, a_p)$.*

Exercice 3.8 (Ordre d'un cycle)**.** 1. *Déterminer les cycles de $\mathfrak{S}_3$.*

2. *Soit c un cycle de longueur p. Montrer que* $\min\{i \in [1, n] : c^i = Id_{[1,n]}\} = p$.

Proposition 3.9. *Montrer que si c et c' sont deux cycles à support disjoints de $\mathfrak{S}_n$, alors c et c' commutent.*