Exercice 2.7. *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.*

1. *Déterminer le nombre de couples (x, y) de $[1, n]^2$ tels que $x \neq y$.*
2. *Soit E un alphabet contenant p lettres. Déterminer le nombre de mots de n lettres pouvant être formés avec l'alphabet E qui ne contiennent jamais deux lettres consécutives identiques.*

Proposition 2.8 (Applications)**.** *$\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et $|\mathcal{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$.*

Exercice 2.9. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Déterminer le nombre d'applications de $[1, n]$ dans $[1, n]$.*
2. *Déterminer le nombre de façons de tirer successivement 5 boules avec remise dans une urne contenant n boules numérotées.*
3. *Déterminer le nombre de mots de 5 lettres pouvant être construits avec un alphabet constitué des lettres du mot KAYAK.*

Corollaire 2.10.

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

2.2 Arrangements

Définition 2.11 (Arrangements)**.** *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel. Un arrangement de longueur p d'éléments de E est une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts. On note A_n^p le nombre d'arrangements de E de longueur p.*

Proposition 2.12. *Pour tous n, $p \in \mathbb{N}$,*

$$A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2.13. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de façons de tirer successivement 5 boules sans remise dans une urne contenant n boules numérotées.*

Théorème 2.14. *Soient E un ensemble de cardinal p et F un ensemble de cardinal n.*

(i) Il y a A_n^p injections de E dans F.

(ii) Si $p = n$, il y a $n!$ bijections de E dans F. Les bijections de E sont appelées des permutations.

2.3 Combinaisons

Définition 2.15 (Combinaisons)**.** *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel. Une combinaison de p éléments de E est une partie de E de cardinal p. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E.*

Proposition 2.16. *Pour tous n, $p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.*

Exercice 2.17. 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de façons de tirer simultanément 5 boules sans remise dans une urne contenant n boules numérotées.*