### 1.3 Parties de $\mathbb{N}$

**Théorème 1.13** (Caractérisation des parties finies de $\mathbb{N}$)**.** *Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.*

**Théorème 1.14.** *Soit $P \subset \mathbb{N}$ un ensemble de cardinal $n$ non nul. Il existe une unique bijection strictement croissante de $[1, n]$ sur $P$.*

## 2. Dénombrement

Soient $E, F$ deux ensembles finis.

### 2.1 Opérations sur les ensembles finis

**Proposition 2.1** (Partition)**.** *Si $E$ et $F$ sont deux ensembles disjoints, alors $E \cup F$ est fini et $|E \cup F| = |E| + |F|$.*

**Exercice 2.2.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Soit $A \subset E$. Montrer que $|E \setminus A| = |E| - |A|$.*
2. *Si $(A_k)_{k\in[1,n]}$ forme une partition de $E$, montrer que $|\bigcup_{k=1}^n A_k| = \sum_{k=1}^n |A_k|$.*

**Proposition 2.3** (Réunion)**.** *Soient $A, B \subset E$. Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

**Exercice 2.4** (Formule du crible / de Poincaré)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[1,n]}$ une famille de parties de $E$. Montrer que*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|.$$

**Proposition 2.5** (Produit cartésien)**.** *$E \times F$ est un ensemble fini et $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.*

**Théorème 2.6** (Lemme des bergers)**.** *Soit $p$ un entier naturel non nul, $E$ et $F$ deux ensembles finis et $f : E \to F$. On suppose que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(\{y\})| = p$. Alors, $|E| = p|F|$.*

**Exercice 2.7.** *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.*

1. *Déterminer le nombre de couples $(x, y)$ de $[1, n]^2$ tels que $x \neq y$.*
2. *Soit $E$ un alphabet contenant $p$ lettres. Déterminer le nombre de mots de $n$ lettres pouvant être formés avec l'alphabet $E$ qui ne contiennent jamais deux lettres consécutives identiques.*

**Proposition 2.8** (Applications)**.** *$\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et $|\mathcal{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$.*

**Exercice 2.9.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Déterminer le nombre d'applications de $[1, n]$ dans $[1, n]$.*
2. *Déterminer le nombre de façons de tirer successivement 5 boules avec remise dans une urne contenant $n$ boules numérotées.*
3. *Déterminer le nombre de mots de 5 lettres pouvant être construits avec un alphabet constitué des lettres du mot KAYAK.*

**Corollaire 2.10.**

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

## 2.2 Arrangements

**Définition 2.11** (Arrangements)**.** *Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $p$ un entier naturel. Un arrangement de longueur $p$ d'éléments de $E$ est une $p$-liste d'éléments de $E$ deux à deux distincts. On note $A_n^p$ le nombre d'arrangements de $E$ de longueur $p$.*

**Proposition 2.12.** *Pour tous $n$, $p \in \mathbb{N}$,*

$$A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 2.13.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de façons de tirer successivement 5 boules sans remise dans une urne contenant $n$ boules numérotées.*

**Théorème 2.14.** *Soient $E$ un ensemble de cardinal $p$ et $F$ un ensemble de cardinal $n$.*

*(i) Il y a $A_n^p$ injections de $E$ dans $F$.*

*(ii) Si $p = n$, il y a $n!$ bijections de $E$ dans $F$. Les bijections de $E$ sont appelées des permutations.*

## 2.3 Combinaisons

**Définition 2.15** (Combinaisons)**.** *Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $p$ un entier naturel. Une combinaison de $p$ éléments de $E$ est une partie de $E$ de cardinal $p$. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de $p$ éléments de $E$.*

**Proposition 2.16.** *Pour tous $n$, $p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.*

**Exercice 2.17.** 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de façons de tirer simultanément 5 boules sans remise dans une urne contenant $n$ boules numérotées.*