1.3 Parties de $\mathbb{N}$

Théorème 1.13 (Caractérisation des parties finies de $\mathbb{N}$)**.** *Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.*

Théorème 1.14. *Soit $P \subset \mathbb{N}$ un ensemble de cardinal n non nul. Il existe une unique bijection strictement croissante de $[1, n]$ sur P.*

2. Dénombrement

Soient E, F deux ensembles finis.

2.1 Opérations sur les ensembles finis

Proposition 2.1 (Partition)**.** *Si E et F sont deux ensembles disjoints, alors $E \cup F$ est fini et $|E \cup F| = |E| + |F|$.*

Exercice 2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Soit $A \subset E$. Montrer que $|E \setminus A| = |E| - |A|$.*
2. *Si $(A_k)_{k\in[1,n]}$ forme une partition de E, montrer que $|\bigcup_{k=1}^n A_k| = \sum_{k=1}^n |A_k|$.*

Proposition 2.3 (Réunion)**.** *Soient $A, B \subset E$. Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

Exercice 2.4 (Formule du crible / de Poincaré)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[1,n]}$ une famille de parties de E. Montrer que*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|.$$

Proposition 2.5 (Produit cartésien)**.** *$E \times F$ est un ensemble fini et $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.*

Théorème 2.6 (Lemme des bergers)**.** *Soit p un entier naturel non nul, E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$. On suppose que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(\{y\})| = p$. Alors, $|E| = p|F|$.*