1. Ensembles finis

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Ensemble fini)**.** *L'ensemble E est un* ensemble fini *si $E = \emptyset$ ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une application bijective $f : [1, n] \to E$.*

Exercice 1.2.

1. *Donner des exemples d'ensembles finis.*
2. *Montrer que si E est un ensemble fini et F est en bijection avec E, alors F est un ensemble fini.*

Lemme 1.3. *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Il existe une bijection de $[1, p]$ dans $[1, q]$ si et seulement si $p = q$.*

Définition 1.4 (Cardinal)**.** *Soit E un ensemble non vide et $p, q \in \mathbb{N}^*$. On suppose que E est en bijection avec $[1, p]$ et $[1, q]$. Alors, $p = q$. Cette valeur commune est appelée cardinal de E et est notée Card$(E) = |E|$. Par convention, $|\emptyset| = 0$.*

Exercice 1.5.

1. *Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$. Déterminer le cardinal de $[1, n]$ puis de $[k, n]$.*
2. *Montrer que tout ensemble en bijection avec un ensemble fini de cardinal n est fini et de cardinal n.*

1.2 Ensembles et cardinaux

E et F désignent deux ensembles finis.

Lemme 1.6. *Si $x \in E$, alors $E \setminus \{x\}$ est un ensemble fini et $|E \setminus \{x\}| = |E| - 1$.*

Théorème 1.7 (Sous-ensemble)**.** *Si $F \subset E$, alors F est un ensemble fini et $|F| \leq |E|$. De plus, $|F| = |E|$ si et seulement si $F = E$.*

Exercice 1.8. *Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble de cardinal fini.*

Lemme 1.9. *Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.*

(i) Si f est injective et F est fini, alors E est fini et $|E| \leq |F|$.

(ii) Si f est surjective et E est fini, alors F est fini et $|F| \leq |E|$.

Théorème 1.10 (Caractérisation des bijections)**.** *Soient E, F deux ensembles finis tels que $|E| = |F|$ et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est injective.

(ii) f est surjective.

(iii) f est bijective.

Corollaire 1.11 (Principe de Dirichlet)**.** *Soient E, F deux ensembles finis tels que $|E| > |F|$ et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Alors, f n'est pas injective.*

Exercice 1.12. *Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel $N \geq 2$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$ tel que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}.$$

1.3 Parties de $\mathbb{N}$

Théorème 1.13 (Caractérisation des parties finies de $\mathbb{N}$)**.** *Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.*

Théorème 1.14. *Soit $P \subset \mathbb{N}$ un ensemble de cardinal n non nul. Il existe une unique bijection strictement croissante de $[1, n]$ sur P.*

2. Dénombrement

Soient E, F deux ensembles finis.

2.1 Opérations sur les ensembles finis

Proposition 2.1 (Partition)**.** *Si E et F sont deux ensembles disjoints, alors $E \cup F$ est fini et $|E \cup F| = |E| + |F|$.*

Exercice 2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Soit $A \subset E$. Montrer que $|E \setminus A| = |E| - |A|$.*
2. *Si $(A_k)_{k\in[1,n]}$ forme une partition de E, montrer que $|\bigcup_{k=1}^n A_k| = \sum_{k=1}^n |A_k|$.*

Proposition 2.3 (Réunion)**.** *Soient $A, B \subset E$. Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

Exercice 2.4 (Formule du crible / de Poincaré)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[1,n]}$ une famille de parties de E. Montrer que*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|.$$

Proposition 2.5 (Produit cartésien)**.** *$E \times F$ est un ensemble fini et $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.*

Théorème 2.6 (Lemme des bergers)**.** *Soit p un entier naturel non nul, E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$. On suppose que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(\{y\})| = p$. Alors, $|E| = p|F|$.*