1. Ensembles finis

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Ensemble fini)**.** *L'ensemble E est un* ensemble fini *si $E = \emptyset$ ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une application bijective $f : [1, n] \to E$.*

Exercice 1.2.

1. *Donner des exemples d'ensembles finis.*
2. *Montrer que si E est un ensemble fini et F est en bijection avec E, alors F est un ensemble fini.*

Lemme 1.3. *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Il existe une bijection de $[1, p]$ dans $[1, q]$ si et seulement si $p = q$.*

Définition 1.4 (Cardinal)**.** *Soit E un ensemble non vide et $p, q \in \mathbb{N}^*$. On suppose que E est en bijection avec $[1, p]$ et $[1, q]$. Alors, $p = q$. Cette valeur commune est appelée cardinal de E et est notée Card$(E) = |E|$. Par convention, $|\emptyset| = 0$.*

Exercice 1.5.

1. *Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$. Déterminer le cardinal de $[1, n]$ puis de $[k, n]$.*
2. *Montrer que tout ensemble en bijection avec un ensemble fini de cardinal n est fini et de cardinal n.*

1.2 Ensembles et cardinaux

E et F désignent deux ensembles finis.

Lemme 1.6. *Si $x \in E$, alors $E \setminus \{x\}$ est un ensemble fini et $|E \setminus \{x\}| = |E| - 1$.*

Théorème 1.7 (Sous-ensemble)**.** *Si $F \subset E$, alors F est un ensemble fini et $|F| \leq |E|$. De plus, $|F| = |E|$ si et seulement si $F = E$.*

Exercice 1.8. *Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble de cardinal fini.*

Lemme 1.9. *Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.*

(i) Si f est injective et F est fini, alors E est fini et $|E| \leq |F|$.

(ii) Si f est surjective et E est fini, alors F est fini et $|F| \leq |E|$.

Théorème 1.10 (Caractérisation des bijections)**.** *Soient E, F deux ensembles finis tels que $|E| = |F|$ et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est injective.

(ii) f est surjective.

(iii) f est bijective.

Corollaire 1.11 (Principe de Dirichlet)**.** *Soient E, F deux ensembles finis tels que $|E| > |F|$ et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Alors, f n'est pas injective.*

Exercice 1.12. *Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel $N \geq 2$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$ tel que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}.$$