5.2 Normes équivalentes

Définition 5.10 (Normes équivalentes)**.** *On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1. De manière équivalente, cela revient à dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+$ tels que*

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x).$$

Proposition 5.11. *Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.*

Proposition 5.12. *Les comparaisons faites dans le paragraphe précédent amènent :*

- *les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur un produit fini d'e.v.n. ;*
- *les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{B},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},2}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ sont équivalentes sur E muni d'une base $\mathcal{B}$.*

Théorème 5.13 (Comparaison des convergences pour 2 normes équivalentes)**.** *Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et $(u_n) \in E^N$ une suite d'éléments de E. Alors (u_n) est convergente au sens de la norme N_1 si et seulement si elle est convergente au sens de la norme N_2, la valeur de la limite étant la même pour les deux normes.*

En particulier, les objets et propriétés topologiques et séquentiels (définis soit avec les ouverts ou voisinages, soit avec des propriétés de convergence) sont les mêmes pour deux normes équivalentes. Notamment, deux normes équivalentes définissent les mêmes compacts. Ainsi, la compacité, montrée pour un produit cartésien de compacts au sens de la topologie produit (définie avec $\|\cdot\|_\infty$) reste donc aussi valide avec les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. L'équivalence des normes permet donc de choisir, parmi celles équivalentes à la norme donnée initialement, celle qui est le plus adaptée à la situation. Comme on l'a vu à plusieurs reprises, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est souvent assez pratique à manipuler. Mais parfois, cela peut être intéressant de « panacher » les normes au gré des étapes du raisonnement. Attention toutefois à ne faire cela qu'avec des normes équivalentes ! On verra dans le chapitre suivant que c'est toujours le cas lorsque E est de dimension finie.

6. Espaces métriques (HP)

Définition 6.1 (Distance)**.** *Soit A un ensemble quelconque. Une distance d sur A est une application $d : A^2 \to \mathbb{R}$ telle que*

(i) (séparation) pour tout $(x, y) \in A^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) (syntétrie) pour tout $(x, y) \in A^2, d(x, y) = d(y, z)$;

(iii) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y, z) \in A^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Comme on l'a vu, cela implique en particulier la positivité. La propriété 3.2.2 affirme alors que l'application $(x, y) \mapsto \|y - x\|$ est une distance.

Exemple 6.2.
- *Soit A une partie d'un e.v.n.. La distance associée à la norme de E se restreint en une distance sur A.*
- *Distance entre 2 sommets d'un graphe non orienté connexe (en un seul morceau), comme étant le nombre minimal d'arêtes à parcourir pour aller d'un sommet à l'autre.*

Définition 6.3 (Espace métrique)**.** *Un espace métrique (E, d) est un ensemble E (pas forcément un espace vectoriel), muni d'une distance d sur E.*

On peut alors définir dans un espace métrique (E, d), de même que dans un e.v.n., des boules, des voisinages, des ouverts, et des fermés. Ce point de vue permet de clarifier la définition de la topologie relative (les ouverts et fermés relatifs) vue en cours de chapitre.

Proposition 6.4 (Caractérisation de la topologie relative par restriction)**.** *Soit $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n., et A une partie de E. Alors la distance d définie par $||\cdot||$ se restreint à A en une distance d_A. La topologie associée à l'espace métrique (A, d_A) est alors la topologie relative de A définie en II-4.*

Définition 6.5 (Convergence dans un espace métrique)**.** *Soit (E, d) un espace métrique, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite (et donc toutes) :*

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \in B(\ell, \varepsilon)$;

(iii) $\forall V \in V(\ell), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \in V$;

Les caractérisations séquentielles restent alors vraies.