Théorème 4.24 (Compacité de $\overline{B}(a,r)$ pour $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ en dimension finie)**.** *Soit E un espace de dimension finie, et $\mathcal{B}$ une base de E. Dans l'e.v.n. $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{B},+\infty})$, $\overline{B}(a,r)$ est compact.*

Éléments de preuve. C'est une réexpression du résultat précédent, à quoi on ajoute le caractère fermé de la boule. □

Exercice 4.25 (Propriétés topologiques d'une somme)**.** *Soit E un ev.n. et A et B deux parties de E. On note $A+B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$*

1. *Montrer que si A et B sont ouverts, alors $A+B$ est ouvert.*
2. *Si A et B sont fermés, $A+B$ est-il nécessairement fermé?*
3. *Montrer que si A et B sont compacts, alors $A+B$ est compact.*
4. *Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A+B$ est fermé.*

Exercice 4.26 (Compacité au sens de Borel et Lebesgue)**.** *Soit E un e.v.n. (ou un espace métrique) et $K \subset E$. On dit que K est BL-compact si pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E tels que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. On dit que de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini.*

1. *Montrer que BL-compact $\Longrightarrow$ BW-compact.*
2. *Montrer que si K est BW-compact, K est précompact (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε)*
3. *Supposons K BW-compact, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant K. Montrer qu'il existe r tel que pour tout $x \in K$, $B(x,r)$ soit inclus dans l'un des U_i (r est appelé nombre de Lebesgue du recouvrement).*
4. *En déduire que BW-compact $\Longrightarrow$ BL-compact.*

5. Comparaison de normes

5.1 Domination

Définition 5.1 (Domination de normes)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$\forall x \in E, \quad N_1(x) \leq \alpha N_2(x).$$

Proposition 5.2 (Caractérisation par l'image de la sphère unité fermée)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *N_1 est dominée par N_2*

(ii) *Toute partie bornée pour N_2 est également bornée pour N_1*

(iii) *il existe α tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq 1 \implies N_1(x) \leq \alpha$. En d'autres termes, la boule fermé unité pour N_2 est bornée pour N_1 ;*

(iv) il existe α tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) = 1 \implies N_1(x) \leq \alpha$. En d'autres termes, la sphère unité pour N_2 est bornée pour N_1;

Proposition 5.3 (Transitivité de la relation de domination)**.** *Si N_1 est dominée par N_2 et N_2 dominée par N_3, alors N_1 est dominée par N_3.*

Exemple 5.4. *Dans $\mathbb{R}^2$:*

- *$\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_2$*
- *$\|\cdot\|_2$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$*
- *$\|\cdot\|_\infty$ est dominée par $\|\cdot\|_1$.*

Théorème 5.5 (Comparaison des normes 1, 2 et ∞)**.** *Soit $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ des e.v.n., et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ les trois normes usuelles définies sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$. Alors*

- *$\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_2$*
- *$\|\cdot\|_2$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$*
- *$\|\cdot\|_\infty$ est dominée par $\|\cdot\|_1$.*

Soit alors E un e.v.n. muni d'une base $\mathcal{B}$. En considérant la décomposition de E comme produit cartésien de droites, on en déduit une comparaison similaire entre $\|\cdot\|_{\mathcal{B},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},2}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$.

Proposition 5.6 (Comparaison des topologies)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et N_1 et N_2 deux normes. On note $\mathcal{V}_i(a)$ l'ensemble des voisinages de a au sens de la norme N_i et $\mathcal{O}_i$ l'ensemble des ouverts au sens de la norme i. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) N_1 est dominée par N_2

(ii) $\forall a \in E, \mathcal{V}_1(a) \subset \mathcal{V}_2(a)$

(iii) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.

Proposition 5.7 (Comparaison des convergences)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et N_1 et N_2 deux normes. Si N_1 est dominée par N_2, alors toute suite convergeant au sens de N_2 converge aussi au sens de N_1, vers la même limite.*

Éléments de preuve**.** Peut se faire soit par majoration soit par les voisinages en utilisant la propriété précédente. □

Méthode 5.8 (Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2)**.**

- *Il suffit de trouver une suite bornée pour N_2 qui ne le soit pas pour N_1*
- *Il suffit de trouver une suite convergente pour N_2 qui ne le soit pas pour N_1.*

Exemple 5.9.

1. *Dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$, mais $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas dominée par $\|\cdot\|_1$*
2. *Montrer que dans $\mathbb{K}[X]$, $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par $\|\cdot\|_1$ mais $\|\cdot\|_1$ n'est pas dominée par $\|\cdot\|_\infty$.*

5.2 Normes équivalentes

Définition 5.10 (Normes équivalentes)**.** *On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1. De manière équivalente, cela revient à dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+$ tels que*

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x).$$

Proposition 5.11. *Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.*

Proposition 5.12. *Les comparaisons faites dans le paragraphe précédent amènent :*

- *les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur un produit fini d'e.v.n. ;*
- *les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{B},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},2}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ sont équivalentes sur E muni d'une base $\mathcal{B}$.*

Théorème 5.13 (Comparaison des convergences pour 2 normes équivalentes)**.** *Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et $(u_n) \in E^N$ une suite d'éléments de E. Alors (u_n) est convergente au sens de la norme N_1 si et seulement si elle est convergente au sens de la norme N_2, la valeur de la limite étant la même pour les deux normes.*

En particulier, les objets et propriétés topologiques et séquentiels (définis soit avec les ouverts ou voisinages, soit avec des propriétés de convergence) sont les mêmes pour deux normes équivalentes. Notamment, deux normes équivalentes définissent les mêmes compacts. Ainsi, la compacité, montrée pour un produit cartésien de compacts au sens de la topologie produit (définie avec $\|\cdot\|_\infty$) reste donc aussi valide avec les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. L'équivalence des normes permet donc de choisir, parmi celles équivalentes à la norme donnée initialement, celle qui est le plus adaptée à la situation. Comme on l'a vu à plusieurs reprises, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est souvent assez pratique à manipuler. Mais parfois, cela peut être intéressant de « panacher » les normes au gré des étapes du raisonnement. Attention toutefois à ne faire cela qu'avec des normes équivalentes ! On verra dans le chapitre suivant que c'est toujours le cas lorsque E est de dimension finie.

6. Espaces métriques (HP)

Définition 6.1 (Distance)**.** *Soit A un ensemble quelconque. Une distance d sur A est une application $d : A^2 \to \mathbb{R}$ telle que*

(i) (séparation) pour tout $(x, y) \in A^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) (syntétrie) pour tout $(x, y) \in A^2, d(x, y) = d(y, z)$;

(iii) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y, z) \in A^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Comme on l'a vu, cela implique en particulier la positivité. La propriété 3.2.2 affirme alors que l'application $(x, y) \mapsto \|y - x\|$ est une distance.

Exemple 6.2.
- *Soit A une partie d'un e.v.n.. La distance associée à la norme de E se restreint en une distance sur A.*
- *Distance entre 2 sommets d'un graphe non orienté connexe (en un seul morceau), comme étant le nombre minimal d'arêtes à parcourir pour aller d'un sommet à l'autre.*