4.3 Sous-ensembles compacts

Définition 4.16 (Sous-ensemble compact)**.** *Soit E un e.v.n., et K une partie de A. On dit que K est compact (ou séquentiellement compacte, ou compact au sens de Bolzano-Weierstrass) si et seulement si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ d'éléments de K, on peut extraire une suite convergeant vers un élément de K.*

La propriété définissant la compacité est appelée propriété de Bolzano-Weierstrass.

Exemple 4.17. 1. *Les intervalles $[a, b]$ fermés bornés sont des compacts de $\mathbb{R}$.*

2. *U est un compact de $\mathbb{C}$.*

3. *Un sous-ensemble fini de E est compact.*

Remarque 4.18 (Propriétés des compacts)**.** *Soit E un e.v.n., et K un compact.*

1. *K est fermé et borné.*

2. *Soit F un fermé relatif de K. Alors F est compact.*

Avertissement 4.19. *On prendra garde que (i) ne permet pas de caractériser les compacts. On montrera que c'est le cas en dimension finie. En revanche, un théorème célèbre (théorème de Riesz) affirme que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie, ce qui donne un contre-exemple en dimension infinie.*

Théorème 4.20 (Caractérisation de la convergence par les v.a. sur un compact)**.** *Soit E un e.v.n., et K un compact de E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge si et seulement si (u_n) admet une unique valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. Si (u_n) a une unique v.a. ℓ et ne converge pas, on peut extraire une suite ne s'approchant pas trop de ℓ. Cette suite doit avoir une v.a. qui ne peut pas être ℓ. □

Remarque 4.21. *Du fait même de sa définition (équivalente à l'existence d'une valeur d'adhérence), la notion de compacité joue un rôle central dans de nombreux problèmes existentiels. L'hypothèse de compacité permet par exemple d'obtenir l'existence d'extrema de fonctions continues.*

Théorème 4.22 (Produit de compacts)**.** *Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des e.v.n., et pour tout $i \in [1, p]$, K_i un compact de E_i. Alors $K_1 \times \cdots \times K_i$ est un sous-ensemble compact de $E_1 \times \cdots \times E_p$ (muni de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$.*

Éléments de preuve. Par extractions successives, on en déduit une version plus générale. □

Théorème 4.23 (Bolzano-Weierstrass en dimension finie)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie, de base $\mathcal{B}$, et muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$. Alors toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. C'est un cas particulier du théorème précédent : - tout d'abord pour récupérer BW sur C - puis en décomposant E en produit de droites. À chaque étape, le caractère borné permet de se restreindre à un intervalle fermé borné de la droite considérée, donc compact. □

Théorème 4.24 (Compacité de $\overline{B}(a,r)$ pour $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ en dimension finie)**.** *Soit E un espace de dimension finie, et $\mathcal{B}$ une base de E. Dans l'e.v.n. $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{B},+\infty})$, $\overline{B}(a,r)$ est compact.*

Éléments de preuve. C'est une réexpression du résultat précédent, à quoi on ajoute le caractère fermé de la boule. □

Exercice 4.25 (Propriétés topologiques d'une somme)**.** *Soit E un ev.n. et A et B deux parties de E. On note $A+B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$*

1. *Montrer que si A et B sont ouverts, alors $A+B$ est ouvert.*
2. *Si A et B sont fermés, $A+B$ est-il nécessairement fermé?*
3. *Montrer que si A et B sont compacts, alors $A+B$ est compact.*
4. *Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A+B$ est fermé.*

Exercice 4.26 (Compacité au sens de Borel et Lebesgue)**.** *Soit E un e.v.n. (ou un espace métrique) et $K \subset E$. On dit que K est BL-compact si pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E tels que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$. On dit que de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini.*

1. *Montrer que BL-compact $\Longrightarrow$ BW-compact.*
2. *Montrer que si K est BW-compact, K est précompact (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε)*
3. *Supposons K BW-compact, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant K. Montrer qu'il existe r tel que pour tout $x \in K$, $B(x,r)$ soit inclus dans l'un des U_i (r est appelé nombre de Lebesgue du recouvrement).*
4. *En déduire que BW-compact $\Longrightarrow$ BL-compact.*

5. Comparaison de normes

5.1 Domination

Définition 5.1 (Domination de normes)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$\forall x \in E, \quad N_1(x) \leq \alpha N_2(x).$$

Proposition 5.2 (Caractérisation par l'image de la sphère unité fermée)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *N_1 est dominée par N_2*

(ii) *Toute partie bornée pour N_2 est également bornée pour N_1*

(iii) *il existe α tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq 1 \implies N_1(x) \leq \alpha$. En d'autres termes, la boule fermé unité pour N_2 est bornée pour N_1 ;*