Proposition 4.11 (Caractérisation des valeurs d'adhérence). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^N$ et $a \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *a est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;*

(ii) *pour tout voisinage V de a, il existe $I \subset \mathbb{N}$ infini tel que pour tout $n \in I$, $u_n \in V$;*

(iii) *pour tout voisinage V de a, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \in V$;*

(iv) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $I \subset \mathbb{N}$ infini tel que pour tout $n \in I$, $u_n \in B(a, \varepsilon)$;*

(v) *pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout N , il existe $n \geq N$ tel que $u_n \in B(a, \varepsilon)$.*

Éléments de preuve.
- (i) $\Longrightarrow$ (ii) : utiliser la définition topologique de la convergence d'une suite extraite vers a;
- (ii) $\Longrightarrow$ (iv) : les boules centrées en a sont des voisinages de a;
- (ii) $\Longleftarrow$ (iii) et (iv) $\Longleftarrow$ (v) car un sous-ensemble de N est infini si et seulement si il est non borné;
- (v) $\Longrightarrow$ (i) en construisant une suite $(u_{\varphi(n)})$ associée à une suite (ε_n) convergent vers 0.

□

Exercice 4.12 (Propriété topologique de l'ensemble des valeurs d'adhérence). *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est fermé.*

4.2 Théorème de Bolzano-Weierstass dans un e.v.n. de dimension finie

Théorème 4.13 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente. En d'autres termes, toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. On peut faire une dichotomie, en gardant toujours une moitié de l'intervalle contenant une infinité de termes de la suite (u_n). □

Proposition 4.14 (Valeur d'adhérence infinie). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergent vers $+\infty$;*

(ii) *pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \geq A$;*

(iii) *pour tout $A \in \mathbb{R}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que une $u_n \geq A$;*

(iv) *(u_n) n'est pas majorée.*

Théorème 4.15 (Caractérisation de la convergence par les valeurs d'adhérence, HP). *Soit une suite (u_n) bornée alors:*
(u_n) converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.

Éléments de preuve. Sens direct déjà étudié. Sens réciproque : pour tout voisinage V de a (unique valeur d'adhérence), seul un nombre fini de termes de u_n est hors de V (sinon on peut en extraire une suite convergente d'après la proposition précédente, et on obtient une deuxième valeur d'adhérence). □

4.3 Sous-ensembles compacts

Définition 4.16 (Sous-ensemble compact)**.** *Soit E un e.v.n., et K une partie de A. On dit que K est compact (ou séquentiellement compacte, ou compact au sens de Bolzano-Weierstrass) si et seulement si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ d'éléments de K, on peut extraire une suite convergeant vers un élément de K.*

La propriété définissant la compacité est appelée propriété de Bolzano-Weierstrass.

Exemple 4.17. 1. *Les intervalles $[a, b]$ fermés bornés sont des compacts de $\mathbb{R}$.*

2. *U est un compact de $\mathbb{C}$.*

3. *Un sous-ensemble fini de E est compact.*

Remarque 4.18 (Propriétés des compacts)**.** *Soit E un e.v.n., et K un compact.*

1. *K est fermé et borné.*

2. *Soit F un fermé relatif de K. Alors F est compact.*

Avertissement 4.19. *On prendra garde que (i) ne permet pas de caractériser les compacts. On montrera que c'est le cas en dimension finie. En revanche, un théorème célèbre (théorème de Riesz) affirme que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie, ce qui donne un contre-exemple en dimension infinie.*

Théorème 4.20 (Caractérisation de la convergence par les v.a. sur un compact)**.** *Soit E un e.v.n., et K un compact de E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge si et seulement si (u_n) admet une unique valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. Si (u_n) a une unique v.a. ℓ et ne converge pas, on peut extraire une suite ne s'approchant pas trop de ℓ. Cette suite doit avoir une v.a. qui ne peut pas être ℓ. □

Remarque 4.21. *Du fait même de sa définition (équivalente à l'existence d'une valeur d'adhérence), la notion de compacité joue un rôle central dans de nombreux problèmes existentiels. L'hypothèse de compacité permet par exemple d'obtenir l'existence d'extrema de fonctions continues.*

Théorème 4.22 (Produit de compacts)**.** *Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des e.v.n., et pour tout $i \in [1, p]$, K_i un compact de E_i. Alors $K_1 \times \cdots \times K_i$ est un sous-ensemble compact de $E_1 \times \cdots \times E_p$ (muni de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$.*

Éléments de preuve. Par extractions successives, on en déduit une version plus générale. □

Théorème 4.23 (Bolzano-Weierstrass en dimension finie)**.** *Soit E un e.v.n. de dimension finie, de base $\mathcal{B}$, et muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$. Alors toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. C'est un cas particulier du théorème précédent : - tout d'abord pour récupérer BW sur C - puis en décomposant E en produit de droites. À chaque étape, le caractère borné permet de se restreindre à un intervalle fermé borné de la droite considérée, donc compact. □