(i) F *est fermé ;*

(ii) toute suite convergente $(x_n)_{n\in N} \in F^N$ *admet sa limite dans* F

Autrement dit, F *est fermé si et seulement si* F *est stable par passage à la limite. Par restriction à* A*, on obtient de même une caractérisation des fermés relatifs.*

Proposition 3.17 (Caractérisation des fermés relatifs)**.** *Soit* $A \subset E$*, et* $F \subset A$*. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) F *est un fermé relatif de* A*;*

(ii) toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ *convergente dans* A *admet sa limite dans* F*.*

4. Valeurs d'adhérence et compacité

4.1 Valeur d'adhérence d'une suite

Définition 4.1 (Suite extraite, fonction extractrice)**.** *1. Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$*. Une suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle qu'il existe* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $v_n = u_{\varphi(n)}$*.*

2. La fonction φ *est appelée fonction extractrice de la suite extraite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Ainsi formellement, une suite extraite de (u_n) *est une composée de* $u_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *par une fonction strictement croissante* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$*. En pratique, cela signifie que* (v_n) *est constitué de termes de* (u_n)*, dans l'ordre, et sans répétition d'indice. Le comportement des suites extraites à l'infini donne des indications quant au comportement de la suite initiale. Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, il est beaucoup plus délicat de faire chemin arrière, une suite extraite ne pouvant fournir qu'une information partielle sur la suite totale.*

Théorème 4.2 (Théorème de convergence des suites extraites)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente dans* E*. Alors toutes les suites extraites de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes, de même limite que* (u_n)*.*

Éléments de preuve. La stricte croissance de l'extractrice φ montre que pour tout n, $\varphi(n) \geq n$. Le résultat est alors immédiat par la définition de la limite. □

Proposition 4.3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe. Alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *si et seulement si* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers une même limite* ℓ*, et dans ce cas,* $\lim u_n = \ell$*.*

C'est un cas particulier de la situation plus générale suivante :

Théorème 4.4 (Convergence par étude de suites extraites couvrantes)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, et* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *une famille finie d'extractrices, telle que* $\bigcup_{i\in I} \varphi_i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$*. Alors* (u_n) *converge vers* ℓ *si et seulement si pour tout* $i \in I$*,* $(u_{\varphi_i(n)})$ *converge vers* ℓ*.*

Éléments de preuve. Sens direct déjà acquis. Pour le sens réciproque, considérer $\varepsilon_i > 0$, associé à chaque φ_i, ainsi qu'un rang de validité N_i, puis se placer au delà du plus grand des N_i. □

Définition 4.5 (Valeur d'adhérence)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^N$, et $a \in E$. On dit que a est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $\lim u_{\varphi(n)} = x$.*

Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble de toutes les limites (finies) des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 4.6. 1. *Décrire les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$.*

2. *Décrire les valeurs d'adhérence de la suite $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.*

3. *Décrire une suite réelle n'ayant pas de valeur d'adhérence.*

Proposition 4.7 (Valeurs d'adhérences d'une suite convergente)**.** *Soit $(u_n) \in E^N$. Si $u_n \to \ell$, alors ℓ est valeur d'adhérence de (u_n) et c'est la seule.*

Éléments de preuve. C'est une réexpression du théorème de convergence des suites extraites. □

Avertissement 4.8. *La réciproque est fausse!*

Exemple 4.9. *Construire une suite réelle non convergente et admettant une seule valeur d'adhérence.*

Proposition 4.10 (Valeurs d'adhérences d'une suite extraite)**.** *Soit (v_n) une suite extraite de (u_n). L'ensemble des valeurs d'adhérence de (v_n) est inclus dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).*

Éléments de preuve. Faire une double-extraction, ce qui revient à composer les extractrices. Attention au sens dans lequel écrire cette composée. □

Proposition 4.11 (Caractérisation des valeurs d'adhérence). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^N$ et $a \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *a est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;*

(ii) *pour tout voisinage V de a, il existe $I \subset \mathbb{N}$ infini tel que pour tout $n \in I$, $u_n \in V$;*

(iii) *pour tout voisinage V de a, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \in V$;*

(iv) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $I \subset \mathbb{N}$ infini tel que pour tout $n \in I$, $u_n \in B(a, \varepsilon)$;*

(v) *pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout N , il existe $n \geq N$ tel que $u_n \in B(a, \varepsilon)$.*

Éléments de preuve.
- (i) $\Longrightarrow$ (ii) : utiliser la définition topologique de la convergence d'une suite extraite vers a;
- (ii) $\Longrightarrow$ (iv) : les boules centrées en a sont des voisinages de a;
- (ii) $\Longleftarrow$ (iii) et (iv) $\Longleftarrow$ (v) car un sous-ensemble de N est infini si et seulement si il est non borné;
- (v) $\Longrightarrow$ (i) en construisant une suite $(u_{\varphi(n)})$ associée à une suite (ε_n) convergent vers 0.

□

Exercice 4.12 (Propriété topologique de l'ensemble des valeurs d'adhérence). *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est fermé.*

4.2 Théorème de Bolzano-Weierstass dans un e.v.n. de dimension finie

Théorème 4.13 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente. En d'autres termes, toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence.*

Éléments de preuve. On peut faire une dichotomie, en gardant toujours une moitié de l'intervalle contenant une infinité de termes de la suite (u_n). □

Proposition 4.14 (Valeur d'adhérence infinie). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergent vers $+\infty$;*

(ii) *pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \geq A$;*

(iii) *pour tout $A \in \mathbb{R}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que une $u_n \geq A$;*

(iv) *(u_n) n'est pas majorée.*

Théorème 4.15 (Caractérisation de la convergence par les valeurs d'adhérence, HP). *Soit une suite (u_n) bornée alors:*
(u_n) converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.

Éléments de preuve. Sens direct déjà étudié. Sens réciproque : pour tout voisinage V de a (unique valeur d'adhérence), seul un nombre fini de termes de u_n est hors de V (sinon on peut en extraire une suite convergente d'après la proposition précédente, et on obtient une deuxième valeur d'adhérence). □