Proposition 3.10 (Règles opératoires générales). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un e.v.n. E, et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n), (v_n) et λ_n sont convergentes, alors :*

(i) la suite $(u_n + v_n)$ est convergente, et

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n;$$

(ii) la suite $(\lambda_n u_n)$ est convergente, et

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n u_n = \lim_{n\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Éléments de preuve. Majorer la norme de la différence avec la limite présumée en utilisant l'inégalité triangulaire. □

Proposition 3.11 (Limite d'un produit). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., muni d'un produit tel que :*

(i) $(x, y) \mapsto x \cdot y$ soit bilinéaire ;

(ii) il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x, y) \in E$, $\|xy\| \leq k \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.

Alors, si $(u_n) \in E^N$ et $(v_n) \in E^N$ sont deux suites convergentes, il en est de même de $(u_n v_n)$, et de plus,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n \cdot \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exemple 3.12. *Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de*

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{n}\right) & e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ 1 & 1 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}^{42}$$

3.2 Caractérisations séquentielles

Proposition 3.13 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence). *Soit $A \subset E$, et $a \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $a \in \overline{A}$

(ii) il existe une suite $(x_n) \in A^N$ telle que $x_n \to a$.

Corollaire 3.14. *En particulier, toute suite convergente d'éléments de A converge dans $\overline{A}$.*

Proposition 3.15 (Caractérisation séquentielle de la densité). *Soit A et B des parties de E.*

(i) A est dense dans B si et seulement si pour tout $b \in B$, il existe $(x_n)_{n\in N} \in A^N$ tel que $x_n \to b$.

(ii) A est partout dense si et seulement si pour tout $b \in E$, il existe $(x_n)_{n\in N} \in A^N$ tel que $x_n \to b$.

Proposition 3.16 (Caractérisation des fermés). *Soit $F \subset E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) F *est fermé ;*

(ii) toute suite convergente $(x_n)_{n\in N} \in F^N$ *admet sa limite dans* F

Autrement dit, F *est fermé si et seulement si* F *est stable par passage à la limite. Par restriction à* A*, on obtient de même une caractérisation des fermés relatifs.*

Proposition 3.17 (Caractérisation des fermés relatifs)**.** *Soit* $A \subset E$*, et* $F \subset A$*. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) F *est un fermé relatif de* A*;*

(ii) toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ *convergente dans* A *admet sa limite dans* F*.*

4. Valeurs d'adhérence et compacité

4.1 Valeur d'adhérence d'une suite

Définition 4.1 (Suite extraite, fonction extractrice)**.** *1. Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$*. Une suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle qu'il existe* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $v_n = u_{\varphi(n)}$*.*

2. La fonction φ *est appelée fonction extractrice de la suite extraite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Ainsi formellement, une suite extraite de (u_n) *est une composée de* $u_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *par une fonction strictement croissante* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$*. En pratique, cela signifie que* (v_n) *est constitué de termes de* (u_n)*, dans l'ordre, et sans répétition d'indice. Le comportement des suites extraites à l'infini donne des indications quant au comportement de la suite initiale. Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, il est beaucoup plus délicat de faire chemin arrière, une suite extraite ne pouvant fournir qu'une information partielle sur la suite totale.*

Théorème 4.2 (Théorème de convergence des suites extraites)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente dans* E*. Alors toutes les suites extraites de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes, de même limite que* (u_n)*.*

Éléments de preuve. La stricte croissance de l'extractrice φ montre que pour tout n, $\varphi(n) \geq n$. Le résultat est alors immédiat par la définition de la limite. □

Proposition 4.3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe. Alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *si et seulement si* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers une même limite* ℓ*, et dans ce cas,* $\lim u_n = \ell$*.*

C'est un cas particulier de la situation plus générale suivante :

Théorème 4.4 (Convergence par étude de suites extraites couvrantes)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, et* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *une famille finie d'extractrices, telle que* $\bigcup_{i\in I} \varphi_i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$*. Alors* (u_n) *converge vers* ℓ *si et seulement si pour tout* $i \in I$*,* $(u_{\varphi_i(n)})$ *converge vers* ℓ*.*

Éléments de preuve. Sens direct déjà acquis. Pour le sens réciproque, considérer $\varepsilon_i > 0$, associé à chaque φ_i, ainsi qu'un rang de validité N_i, puis se placer au delà du plus grand des N_i. □