(ii) pour tout $a \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A \subset U$;

(iii) il existe un ouvert U_0 de E tel que $U = A \cap U_0$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que U est un ouvert relatif de A.

Exemple 2.45. *1. Décrire les ouverts relatifs convexes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.*

2. Que dire des ouverts relatifs de A si A est ouvert ?

3. Montrer que A et $\varnothing$ sont toujours des ouverts relatifs de A.

Proposition 2.46 (Fermés relatifs)**.** *Soit $A \subset E$, et $F \subset A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $A \setminus F$ est un ouvert relatif de A;

(ii) il existe F_0 un fermé de E tel que $F = A \cap F_0$.

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que F est un fermé relatif de A.

Exemple 2.47. *1. Que dire des fermés relatifs de A lorsque A est fermé ?*

2. Montrer que A et $\varnothing$ sont toujours des fermés relatifs de A.

Théorème 2.48 (Union, intersection d'ouverts, fermés relatifs)**.** *1. Une union quelconque d'ouverts relatifs de A est un ouvert relatif de A.*

2. Une intersection finie d'ouverts relatifs de A est un ouvert relatif de A.

3. Une union finie de fermés relatifs de A est un fermé relatif de A.

4. Une intersection quelconque de fermés relatifs de A est un fermé relatif de A.

3. Convergences

3.1 Suites convergentes

Proposition 3.1 (Convergence d'une suite d'éléments d'un e.v.n.)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un e.v.n. E, et $\ell \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) (point de vue métrique) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

(ii) (réexpression du point de vue métrique) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n \in B(\ell, \varepsilon)$.

(iii) (point de vue topologique) $\forall V \in \mathcal{V}(\ell)$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n \in V$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que (u_n) converge vers ℓ, ou que (u_n) admet ℓ comme limite.

Remarque 3.2. *Dans le point (i), l'inégalité $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ peut être exprimée indifféremment avec une inégalité large ou stricte, sans que cela ne modifie le sens de la propriété. C'est ce que suggère l'équivalence avec le point (ii).*

Théorème 3.3 (Unicité de la limite)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un e.v.n. E. Si (u_n) admet une limite, alors cette limite est unique.*

Cette unicité permet de définir sans ambiguïté LA limite d'une suite (en cas d'existence).

Remarque 3.4 (Limite d'une suite)**.** *Si (u_n) converge vers ℓ, on écrira $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$, ce qui est défini sans ambiguïté en vertu du théorème précédent.*

Exemple 3.5.

1. *Quelle est la limite, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, de la suite $(A_n) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n)$ par*
$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 2+\frac{1}{n+1} \\ (1+\frac{1}{n})^n & 1 \end{pmatrix}$$
2. *Quelle est la limite dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur les coefficients, de la suite définie pour $n \geq 0$ par*
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\binom{n}{k}} X^k$$
3. *Quelle est la limite pour la norme de la convergence en moyenne sur $[0,1]$ de la suite*
$$f_n : x \mapsto e^{-nx}.$$
Cette suite admet-elle une limite pour la norme de la convergence uniforme?

Ainsi, la notion de convergence est fortement dépendante de la norme (en tout cas en dimension infinie).

Proposition 3.6 (Convergent implique borné)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si (u_n) est convergente, alors elle est bornée.*

Proposition 3.7 (Caractérisation de la convergence dans un produit cartésien)**.** *Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des e.v.n., et $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ le produit cartésien, muni de la norme produit. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{p,n}).$$
Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ si et seulement si pour tout $k \in [1,p]$, $(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k.

En particulier, on retrouve l'équivalence entre la convergence dans $\mathbb{R}^n$ et la convergence coordonnée par coordonnée pour $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 3.8 (Caractérisation par la limite des normes)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, \ell \in E$. La suite (x_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite de réels $(\|x_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

En particulier, cela permet d'exploiter un certain nombre de techniques de majorations vues dans le cadre de réels.

Méthode 3.9. *Pour montrer que $u_n \to \ell$, il suffit de trouver une majoration*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - \ell\| \leq M_n,$$
où (M_n) est une suite de réels de limite nulle.

Comme il n'y a a priori pas dans E d'autres opérations que l'addition et la multiplication par un scalaire.

Proposition 3.10 (Règles opératoires générales). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un e.v.n. E, et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n), (v_n) et λ_n sont convergentes, alors :*

(i) la suite $(u_n + v_n)$ est convergente, et

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n;$$

(ii) la suite $(\lambda_n u_n)$ est convergente, et

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n u_n = \lim_{n\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Éléments de preuve. Majorer la norme de la différence avec la limite présumée en utilisant l'inégalité triangulaire. □

Proposition 3.11 (Limite d'un produit). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., muni d'un produit tel que :*

(i) $(x, y) \mapsto x \cdot y$ soit bilinéaire ;

(ii) il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x, y) \in E$, $\|xy\| \leq k \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.

Alors, si $(u_n) \in E^N$ et $(v_n) \in E^N$ sont deux suites convergentes, il en est de même de $(u_n v_n)$, et de plus,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n \cdot \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exemple 3.12. *Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de*

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{n}\right) & e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ 1 & 1 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}^{42}$$

3.2 Caractérisations séquentielles

Proposition 3.13 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence). *Soit $A \subset E$, et $a \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $a \in \overline{A}$

(ii) il existe une suite $(x_n) \in A^N$ telle que $x_n \to a$.

Corollaire 3.14. *En particulier, toute suite convergente d'éléments de A converge dans $\overline{A}$.*

Proposition 3.15 (Caractérisation séquentielle de la densité). *Soit A et B des parties de E.*

(i) A est dense dans B si et seulement si pour tout $b \in B$, il existe $(x_n)_{n\in N} \in A^N$ tel que $x_n \to b$.

(ii) A est partout dense si et seulement si pour tout $b \in E$, il existe $(x_n)_{n\in N} \in A^N$ tel que $x_n \to b$.

Proposition 3.16 (Caractérisation des fermés). *Soit $F \subset E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*