Exercice 2.36 (Frontière d'une union). *Soit A et B des parties d'un e.v.n. E. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$. La réciproque est-elle vraie ?*

Définition 2.37 (Parties denses). *(i) Soit A et B deux parties de E. On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$. Autrement dit, A est dense dans B sai :*

$$\forall b \in B,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ d(a,b) < \varepsilon.$$

(ii) Soit A une partie de E. On dit que A est partout dense si $\overline{A} = E$ (ce qui équivaut donc à dire que A est dense dans E).

Proposition 2.38 (Lien avec la densité dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$). *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est (partout) dense dans $\mathbb{R}$;

(ii) pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, il existe $x \in A$ tel que $a < x < b$.

Exemple 2.39. *1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est partout dense (dans $\mathbb{R}$). Il est dense dans $[0,1]$.*

2. $Esc([a,b], \mathbb{R})$ est dense dans $C^0([a,b], \mathbb{R})$, ainsi que dans $C^0_m([a,b], \mathbb{R})$ (espace des fonctions continues par morceaux).

3. $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

2.4 Topologie relative

Définition 2.40 (Voisinages relatifs). *Soit $A \subset E$, et $a \in A$. Un voisinage relatif de a dans A est une partie $V \subset A$ telle qu'il existe $V_0 \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V = V_0 \cap A$.*

Exemple 2.41. *1. On se place dans l'e.v.n. $\mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $]a-1, a+1[$ est un voisinage relatif de a dans $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un voisinage de a dans $\mathbb{C}$*

2. On se place dans l'e.v.n. $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $[a, a+1]$ est un voisinage relatif de a dans $[a, +\infty[$.

Remarque 2.42 (Voisinage à droite, voisinage à gauche). *Dans l'e.v.n. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, un voisinage relatif de a dans $[a, +\infty[$ est parfois appelé voisinage à droite de a.*
De même, un voisinage à gauche de a est un voisinage relatif de a dans $]-\infty, a]$.

Proposition 2.43 (Caractérisation des voisinages relatifs). *Soit $V \subset A \subset E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *V est un voisinage relatif de a dans A;*
- *il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap B(a, \varepsilon) \subset V$;*
- *il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $d(x,a) < \varepsilon \implies a \in V$.*

Proposition 2.44 (Ouverts relatifs). *Soit $A \subset E$, et $U \subset A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) U est un voisinage relatif de tous ses points dans A;

(ii) pour tout $a \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A \subset U$;

(iii) il existe un ouvert U_0 de E tel que $U = A \cap U_0$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que U est un ouvert relatif de A.

Exemple 2.45. *1. Décrire les ouverts relatifs convexes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.*

2. Que dire des ouverts relatifs de A si A est ouvert ?

3. Montrer que A et $\varnothing$ sont toujours des ouverts relatifs de A.

Proposition 2.46 (Fermés relatifs)**.** *Soit $A \subset E$, et $F \subset A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $A \setminus F$ est un ouvert relatif de A;

(ii) il existe F_0 un fermé de E tel que $F = A \cap F_0$.

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que F est un fermé relatif de A.

Exemple 2.47. *1. Que dire des fermés relatifs de A lorsque A est fermé ?*

2. Montrer que A et $\varnothing$ sont toujours des fermés relatifs de A.

Théorème 2.48 (Union, intersection d'ouverts, fermés relatifs)**.** *1. Une union quelconque d'ouverts relatifs de A est un ouvert relatif de A.*

2. Une intersection finie d'ouverts relatifs de A est un ouvert relatif de A.

3. Une union finie de fermés relatifs de A est un fermé relatif de A.

4. Une intersection quelconque de fermés relatifs de A est un fermé relatif de A.

3. Convergences

3.1 Suites convergentes

Proposition 3.1 (Convergence d'une suite d'éléments d'un e.v.n.)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un e.v.n. E, et $\ell \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) (point de vue métrique) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

(ii) (réexpression du point de vue métrique) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n \in B(\ell, \varepsilon)$.

(iii) (point de vue topologique) $\forall V \in \mathcal{V}(\ell)$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n \in V$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que (u_n) converge vers ℓ, ou que (u_n) admet ℓ comme limite.

Remarque 3.2. *Dans le point (i), l'inégalité $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ peut être exprimée indifféremment avec une inégalité large ou stricte, sans que cela ne modifie le sens de la propriété. C'est ce que suggère l'équivalence avec le point (ii).*