## 2.3 Intérieur, adhérence, frontière

**Définition 2.23** (Intérieur)**.** *Soit $A$ une partie de l'e.v.n. $E$.*

*(i) Un point $a \in E$ est* intérieur *à $A$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.*

*(ii) L'intérieur de $A$, noté $\hat{A}$, est la partie de $E$ constituée de tous les points intérieurs à $A$ :*

$$\hat{A} = \{a \in E \mid \exists \varepsilon > 0,\ B(a, \varepsilon) \subset A\}.$$

**Proposition 2.24** (Caractérisation topologique de l'intérieur)**.** *Soit $A$ une partie de $E$ ;*

*(i) $\hat{A} \subset A$ ;*

*(ii) $\hat{A}$ est un ouvert de $E$ ;*

*(iii) Si $U$ est un ouvert de $A$ tel que $U \subset A$, alors $U \subset \hat{A}$.*

*Ces trois propriétés peuvent être résumées en disant que $\hat{A}$ est le plus grand ouvert de $E$ inclus dans $A$.*

**Corollaire 2.25** (Intérieur d'un ouvert)**.** *Si $A$ est ouvert, $\mathring{A} = A$. C'est même une équivalence.*

**Exemple 2.26.**

1. *Décrire l'intérieur d'un intervalle.*
2. *Décrire $\hat{B}(a, r)$ ?*
3. *Justifier que $\hat{Q} = \emptyset$. A-t-on $\widehat{A \cup B} = \hat{A} \cup \hat{B}$ ?*

**Définition 2.27** (Adhérence)**.** *Soit $A$ une partie de $E$.*

*(i) Un point $a$ est adhérent à $A$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

*(ii) L'adhérence $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à $A$ :*

$$\overline{A} = \{a \in E \mid \forall \varepsilon > 0,\ B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

*L'adhérence est donc l'ensemble des points qui « collent » à $A$, dans le sens où on peut en trouver des points de $A$ arbitrairement proches.*

**Exemple 2.28.**

1. *Décrire $\overline{Q}$. A-t-on $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ?*
2. *Que dire de l'adhérence d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ?*
3. *Décrire $\overline{B}(a, r)$ ?*
4. *Soit $F = \{x \mapsto e^{-nx},\ n \in \mathbb{N}^*\} \subset C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que la fonction nulle est adhérente à $F$ pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ .*
5. *Soit $A$ une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(A)$ sont adhérents à $A$.*

**Lemme 2.29** (Lien avec l'intérieur)**.** *Soit $A \subset E$. Alors*

- $\overline{A} = (\hat{A}^c)^c$, *où* $X^c$ *désigne le complémentaire de* $X$ *dans* $E$ *;*
- $(\overline{A})^c = \hat{A}^c$
- $(\overline{A})^c = \hat{A}^c$

**Proposition 2.30** (Caractérisation topologique de l'adhérence)**.** *Soit* $A \subset E$*. Alors* $\overline{A}$ *est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) tel que* $A \subset \overline{A}$*. Autrement dit :*

*(i)* $\overline{A}$ *est un fermé*

*(ii)* $A \subset \overline{A}$

*(iii) Si* $F$ *est un fermé tel que* $A \subset F$*, alors* $\overline{A} \subset F$*.*

*On donne une autre caractérisation en terme de distance. Pour cela, on définit dans un premier temps la distance d'un point à une partie.*

**Définition 2.31** (Distance à une partie)**.** *Soit* $A$ *une partie non vide de* $E$*. Soit* $x \in E$*. On définit la distance de* $x$ *à* $A$ *par :*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|y - x\|_E$$

**Proposition 2.32** (Caractérisation de l'adhérence par la distance)**.** *Soit* $A \subset E$*. Alors*

$$\bar{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}.$$

**Remarque 2.33** (Propriétés relatives aux intersections et unions)**.** *Ces propriétés ne sont pas explicitement marquées au programme, mais assez utiles. Soit* $A \subset E$*.*

1. $\widehat{A \cap B} = \hat{A} \cap \hat{B}$*.*
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$*.*
3. $\hat{A} \cup \hat{B} \subset \widehat{A \cup B}$*, mais l'inclusion réciproque peut être fausse.*
4. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$*, mais l'inclusion réciproque peut être fausse.*

**Définition 2.34** (Frontière)**.** *Soit* $A \subset E$*. La frontière de* $A$*, notée* $Fr(A)$*, est*

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus \hat{A} = \bar{A} \cap \left(\hat{A}\right)^c.$$

*Il s'agit donc des points arbitrairement proche de points de* $A$ *et de points qui ne sont pas dans* $A$*.*

**Exemple 2.35.** *1. Quelle est la frontière de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *?*

*2. Quelle est la frontière de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$ *?*

*3. Déterminer la frontière de* $\hat{B}(a, r)$*. Quelle est la frontière de* $\overline{B}(a, r)$ *?*

*4. De façon générale, étant donné* $A \subset E$*, a-t-on* $Fr(A) = Fr(\overline{A})$ *? A-t-on* $Fr(A) = Fr(\hat{A})$ *?*

**Exercice 2.36** (Frontière d'une union). *Soit $A$ et $B$ des parties d'un e.v.n. $E$. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$. La réciproque est-elle vraie ?*

**Définition 2.37** (Parties denses). *(i) Soit $A$ et $B$ deux parties de $E$. On dit que $A$ est dense dans $B$ si $B \subset \overline{A}$. Autrement dit, $A$ est dense dans $B$ sai :*

$$\forall b \in B,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ d(a,b) < \varepsilon.$$

*(ii) Soit $A$ une partie de $E$. On dit que $A$ est partout dense si $\overline{A} = E$ (ce qui équivaut donc à dire que $A$ est dense dans $E$).*

**Proposition 2.38** (Lien avec la densité dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$). *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $A$ est (partout) dense dans $\mathbb{R}$;*

*(ii) pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, il existe $x \in A$ tel que $a < x < b$.*

**Exemple 2.39.** *1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est partout dense (dans $\mathbb{R}$). Il est dense dans $[0,1]$.*

*2. $Esc([a,b], \mathbb{R})$ est dense dans $C^0([a,b], \mathbb{R})$, ainsi que dans $C^0_m([a,b], \mathbb{R})$ (espace des fonctions continues par morceaux).*

*3. $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.*

## 2.4 Topologie relative

**Définition 2.40** (Voisinages relatifs). *Soit $A \subset E$, et $a \in A$. Un voisinage relatif de $a$ dans $A$ est une partie $V \subset A$ telle qu'il existe $V_0 \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V = V_0 \cap A$.*

**Exemple 2.41.** *1. On se place dans l'e.v.n. $\mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $]a-1, a+1[$ est un voisinage relatif de $a$ dans $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un voisinage de $a$ dans $\mathbb{C}$*

*2. On se place dans l'e.v.n. $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $[a, a+1]$ est un voisinage relatif de $a$ dans $[a, +\infty[$.*

**Remarque 2.42** (Voisinage à droite, voisinage à gauche). *Dans l'e.v.n. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, un voisinage relatif de $a$ dans $[a, +\infty[$ est parfois appelé voisinage à droite de $a$.*
*De même, un voisinage à gauche de $a$ est un voisinage relatif de $a$ dans $]-\infty, a]$.*

**Proposition 2.43** (Caractérisation des voisinages relatifs). *Soit $V \subset A \subset E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *$V$ est un voisinage relatif de $a$ dans $A$;*
- *il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap B(a, \varepsilon) \subset V$;*
- *il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $d(x,a) < \varepsilon \implies a \in V$.*

**Proposition 2.44** (Ouverts relatifs). *Soit $A \subset E$, et $U \subset A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $U$ est un voisinage relatif de tous ses points dans $A$;*