2.2 Ouverts, fermés, voisinages

Définition 2.11 (Voisinage)**.** *Soit $a \in E$. Un voisinage V de a est un sous-ensemble V de E tel qu'il existe une boule ouverte centrée en a entièrement contenue dans V:*

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \subset V, \quad \textit{i.e.} \quad \exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ d(x,a) < \varepsilon \implies x \in V.$$

On note $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des voisinages de a.

Exemple 2.12 (Voisinages dans $\mathbb{R}$)**.**

- *Dans $\mathbb{R}$, un voisinage de x est un ensemble contenant un intervalle $]a,b[$ tel que $x \in]a,b[$.*
- *Par extension et commodité, on dit parfois qu'un ensemble contenant un intervalle $]a,+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$. Version symétrique pour $-\infty$. On notera $\mathcal{V}(+\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.13 (Intersection et union de voisinages)**.** *Soit $(V_i)_{i\in I} \in \mathcal{V}(a)^I$ une famille de voisinages de a.*

(i) Soit $V \in \mathcal{V}(a)$ et $W \in \mathcal{P}(E)$ tel que $V \subset W$. Alors $W \in \mathcal{V}(a)$.

(ii) En particulier, si $I \neq \emptyset$, $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{V}(a)$.

(iii) Si I est fini,

$$\bigcap_{i\in I} V_i \in V(a).$$

Exemple 2.14. *Trouver dans R un exemple de famille infinie de voisinages de $a \in R$ dont l'intersection n'est pas un voisinage de a.*

Définition 2.15 (Partie ouverte)**.**

- *Un* ouvert *U de E est une partie U de E qui est voisinage de tous ses points.*
- *De manière équivalente, $U \subset E$ est un ouvert ssi :*

$$\forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset U.$$

Intuitivement, un ouvert est un ensemble dont le « bord » est flou : on peut s'en approcher, mais jamais l'atteindre en restant dans U. Ainsi, l'image qu'il faut en garder est qu'un ouvert est un ensemble ne contenant pas son bord. Évidemment, n'ayant pas défini la notion de bord, ceci reste une image.

Définition 2.16 (Partie fermée)**.** *Un sous-ensemble F de E est* fermé *si son complémentaire $C_E F$ est ouvert.*

Cette fois, intuitivement, c'est le complémentaire qui ne contient pas son bord, donc F, lui contient tout son bord.

Exemple 2.17.

1. *Les intervalles ouverts sont des sous-ensembles ouverts de R.*
2. *Les intervalles fermés sont des sous-ensembles fermés de R.*
3. *Les intervalles semi-ouverts ne sont ni ouverts ni fermés.*
4. *R et $\varnothing$ sont des sous-ensembles à la fois fermés et ouverts de R.*

5. *On peut montrer que les sous-ensembles ouverts de R sont les unions disjointes d'intervalles ouverts (voir exercices).*

Définition 2.18 (Topologie)**.** *La* topologie *d'un e.v.n. E est la donnée de l'ensemble O de tous ses ouverts.*

La propriété suivante généralise l'observation faite sur les intervalles.

Proposition 2.19 (Propriétés topologiques des boules)**.** 1. *Les boules ouvertes $\hat{B}(a,r)$ sont des parties ouvertes de E.*

2. *Les boules fermées $\overline{B}(a,r)$ sont des parties fermées de E.*

3. *Les sphères $S(a,r)$ sont des parties fermées de E.*

Proposition 2.20 (Union, intersection d'ouverts et de fermés)**.** 1. *Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert ;*

2. *Toute intersection d'un nombre* fini *d'ouverts est un ouvert ;*

3. *Toute intersection quelconque de fermés est un fermé ;*

4. *Toute union d'un nombre* fini *de fermés est un fermé.*

Éléments de preuve. 1. Si x est dans l'union, il existe une boule centrée en x restant dans l'un des ouverts, donc dans leur union.

2. Prendre le minimum des rayons des boules centrées en x restant dans chaque ouvert. Pourquoi doit-on se limiter au cas fini ?

3. Par complémentation

4. De même.

□

Exemple 2.21. *Voici deux contre-exemples à bien garder en tête :*

1. *Contre-exemple pour une intersection infinie d'ouverts :*

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1\right[= \{0\}.$$

2. *Contre-exemple pour une union infinie de fermés :*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0,1]$$

Proposition 2.22 (Propriétés topologiques d'un produit cartésien)**.** *Soit $((E_i, N_i))_{i\in[1,n]}$ une famille finie d'e.v.n.. On munit le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme produit.*

1. *Soit, pour tout $i \in [1,n]$, U_i un ouvert de E_i. Alors $U_1 \times \cdots \times U_n$ est un ouvert de E.*

2. *Soit, pour tout $i \in [1,n]$, F_i un fermé de E_i. Alors $F_1 \times \cdots \times F_n$ est un fermé de E.*

2.3 Intérieur, adhérence, frontière

Définition 2.23 (Intérieur)**.** *Soit A une partie de l'e.v.n. E.*

(i) Un point $a \in E$ est intérieur *à A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.*

(ii) L'intérieur de A, noté $\hat{A}$, est la partie de E constituée de tous les points intérieurs à A :

$$\hat{A} = \{a \in E \mid \exists \varepsilon > 0,\ B(a, \varepsilon) \subset A\}.$$

Proposition 2.24 (Caractérisation topologique de l'intérieur)**.** *Soit A une partie de E ;*

(i) $\hat{A} \subset A$;

(ii) $\hat{A}$ est un ouvert de E ;

(iii) Si U est un ouvert de A tel que $U \subset A$, alors $U \subset \hat{A}$.

Ces trois propriétés peuvent être résumées en disant que $\hat{A}$ est le plus grand ouvert de E inclus dans A.

Corollaire 2.25 (Intérieur d'un ouvert)**.** *Si A est ouvert, $\mathring{A} = A$. C'est même une équivalence.*

Exemple 2.26.

1. *Décrire l'intérieur d'un intervalle.*
2. *Décrire $\hat{B}(a, r)$?*
3. *Justifier que $\hat{Q} = \emptyset$. A-t-on $\widehat{A \cup B} = \hat{A} \cup \hat{B}$?*

Définition 2.27 (Adhérence)**.** *Soit A une partie de E.*

(i) Un point a est adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(ii) L'adhérence $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A :

$$\overline{A} = \{a \in E \mid \forall \varepsilon > 0,\ B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

L'adhérence est donc l'ensemble des points qui « collent » à A, dans le sens où on peut en trouver des points de A arbitrairement proches.

Exemple 2.28.

1. *Décrire $\overline{Q}$. A-t-on $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?*
2. *Que dire de l'adhérence d'un intervalle de $\mathbb{R}$?*
3. *Décrire $\overline{B}(a, r)$?*
4. *Soit $F = \{x \mapsto e^{-nx},\ n \in \mathbb{N}^*\} \subset C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que la fonction nulle est adhérente à F pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*
5. *Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(A)$ sont adhérents à A.*

Lemme 2.29 (Lien avec l'intérieur)**.** *Soit $A \subset E$. Alors*