puissances d'une matrice A. C'est le cas par exemple de la série exponentielle, permettant de définir l'exponentielle d'une matrice carrée :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Nous justifierons ultérieurement que cette série est convergente (indépendamment de la norme choisie). L'un des points clés (outre l'équivalence des normes en dimension finie) sera de pouvoir majorer $\|A^n\|$ par $\|A\|^n$, pour pouvoir se ramener à la convergence d'une série numérique. Nous définirons dans le chapitre suivant une autre norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$, notée $\|A\|$, et appelée *norme triple*, ou *norme d'opérateur*. □

1.6 Produits d'e.v.n.

Proposition 1.22 (Produit cartésien d'e.v.n.)**.** *Soit $((E_i, N_i))_{i\in[1,n]}$ une famille finie d'e.v.n.. Pour $X = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on définit*

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i), \quad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} N_i(x_i)^2} \quad \textit{et} \quad \|X\|_\infty = \max_{i\in[1,n]} N_i(x_i).$$

Ce sont des normes. La norme $\|\cdot\|_\infty$ ainsi définie est appelée norme produit des normes N_i.

Éléments de preuve. Adaptation facile du cas de $\mathbb{K}^n$. □

Remarque 1.23. *La notation $\|\cdot\|_\infty$ n'indique que la dernière couche de la définition de la norme. Les normes internes utilisées sur chaque composante peuvent ne pas être des normes infinies.*

2. Topologie d'un espace vectoriel normé

2.1 Distance et boules

Définition 2.1 (Distance associée à une norme)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et $(x, y) \in E$. On définit la distance de x à y par :*

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

Proposition 2.2 (Propriétés de la distance)**.** *La distance $d : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifie :*

(i) (séparation) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) (symétrie) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

(iv) (positivité) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) \geq 0$.

Remarque 2.3.
- *La propriété (iv) découle des 3 autres.*

- *Les propriétés (i) à (iii) ci-dessus (et donc aussi (iv)) permettent de définir des distances sur des ensembles beaucoup plus généraux (qui n'ont pas besoin d'être des espaces vectoriels).*

Définition 2.4 (Boules ouvertes, boules fermées, sphère). *Soit $a \in E$, et $r \in \mathbb{R}_+$.*

(i) La boule ouverte de centre a et de rayon r est définie par $B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}$;

(ii) La boule fermée de centre a et de rayon r est définie par $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}$;

(iii) La sphère de centre a et de rayon r est définie par $S(a,r) = \{y \in E \mid d(x,a) = r\}$.

Pour lever une éventuelle ambiguïté, cela arrive d'utiliser la notation $\hat{B}(a,r)$ pour désigner la boule ouverte $B(a,r)$.

Exemple 2.5. *1. Les boules dans $\mathbb{R}^2$ au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ sont représentées dans la figure 3.1. Essayez de représenter de la même façon les boules pour la norme $\|\cdot\|_1$ et la norme $\|\cdot\|_\infty$, et observez qu'un boule n'est pas toujours ronde !*

2. À quoi ressemble la boule $B(f,\varepsilon)$, pour $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?

Exemple 2.6. *Dans $\mathbb{R}$, les boules sont des intervalles (voir figure 3.2) :*

- $B(x,r) = [x-r, x+r]$
- $\overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$

En fait, tout intervalle borné ouvert est une boule ouverte, tout intervalle borné fermé est une boule fermée :

- $[a,b] = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$,
- $[a,b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$

Proposition 2.7 (Caractérisation des parties bornées). *(i) Une boule est bornée.*

(ii) Une partie A de E est bornée si et seulement s'il existe $(a,r) \in E \times R_+$ tel que $A \subset B(a,r)$.

Éléments de preuve. Utiliser l'inégalité triangulaire. Faire un dessin ! □

Définition 2.8 (Ensemble convexe). *Soit F une partie E. On dit que F est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB] = \{(1-t)A + tB, t \in [0,1]\}$ est entièrement inclus dans E.*

Exemple 2.9. *Par définition, les intervalles sont les sous-ensembles convexes de R.*

Théorème 2.10 (Convexité des boules). *Pour tout $a \in E$ et $r > 0$, $\hat{B}(a,r)$ et $\overline{B}(a,r)$ sont des parties convexes de E.*

Éléments de preuve. Encore un petit coup d'inégalité triangulaire. □

2.2 Ouverts, fermés, voisinages

Définition 2.11 (Voisinage)**.** *Soit $a \in E$. Un voisinage V de a est un sous-ensemble V de E tel qu'il existe une boule ouverte centrée en a entièrement contenue dans V:*

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \subset V, \quad \textit{i.e.} \quad \exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ d(x,a) < \varepsilon \implies x \in V.$$

On note $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des voisinages de a.

Exemple 2.12 (Voisinages dans $\mathbb{R}$)**.**

- *Dans $\mathbb{R}$, un voisinage de x est un ensemble contenant un intervalle $]a,b[$ tel que $x \in]a,b[$.*
- *Par extension et commodité, on dit parfois qu'un ensemble contenant un intervalle $]a,+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$. Version symétrique pour $-\infty$. On notera $\mathcal{V}(+\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.13 (Intersection et union de voisinages)**.** *Soit $(V_i)_{i\in I} \in \mathcal{V}(a)^I$ une famille de voisinages de a.*

(i) Soit $V \in \mathcal{V}(a)$ et $W \in \mathcal{P}(E)$ tel que $V \subset W$. Alors $W \in \mathcal{V}(a)$.

(ii) En particulier, si $I \neq \emptyset$, $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{V}(a)$.

(iii) Si I est fini,

$$\bigcap_{i\in I} V_i \in V(a).$$

Exemple 2.14. *Trouver dans R un exemple de famille infinie de voisinages de $a \in R$ dont l'intersection n'est pas un voisinage de a.*

Définition 2.15 (Partie ouverte)**.**

- *Un* ouvert *U de E est une partie U de E qui est voisinage de tous ses points.*
- *De manière équivalente, $U \subset E$ est un ouvert ssi :*

$$\forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset U.$$

Intuitivement, un ouvert est un ensemble dont le « bord » est flou : on peut s'en approcher, mais jamais l'atteindre en restant dans U. Ainsi, l'image qu'il faut en garder est qu'un ouvert est un ensemble ne contenant pas son bord. Évidemment, n'ayant pas défini la notion de bord, ceci reste une image.

Définition 2.16 (Partie fermée)**.** *Un sous-ensemble F de E est* fermé *si son complémentaire $C_E F$ est ouvert.*

Cette fois, intuitivement, c'est le complémentaire qui ne contient pas son bord, donc F, lui contient tout son bord.

Exemple 2.17.

1. *Les intervalles ouverts sont des sous-ensembles ouverts de R.*
2. *Les intervalles fermés sont des sous-ensembles fermés de R.*
3. *Les intervalles semi-ouverts ne sont ni ouverts ni fermés.*
4. *R et $\varnothing$ sont des sous-ensembles à la fois fermés et ouverts de R.*