puissances d'une matrice A. C'est le cas par exemple de la série exponentielle, permettant de définir l'exponentielle d'une matrice carrée :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Nous justifierons ultérieurement que cette série est convergente (indépendamment de la norme choisie). L'un des points clés (outre l'équivalence des normes en dimension finie) sera de pouvoir majorer $\|A^n\|$ par $\|A\|^n$, pour pouvoir se ramener à la convergence d'une série numérique. Nous définirons dans le chapitre suivant une autre norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$, notée $\|A\|$, et appelée *norme triple*, ou *norme d'opérateur*. □

1.6 Produits d'e.v.n.

Proposition 1.22 (Produit cartésien d'e.v.n.)**.** *Soit $((E_i, N_i))_{i\in[1,n]}$ une famille finie d'e.v.n.. Pour $X = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on définit*

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i), \quad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} N_i(x_i)^2} \quad \textit{et} \quad \|X\|_\infty = \max_{i\in[1,n]} N_i(x_i).$$

Ce sont des normes. La norme $\|\cdot\|_\infty$ ainsi définie est appelée norme produit des normes N_i.

Éléments de preuve. Adaptation facile du cas de $\mathbb{K}^n$. □

Remarque 1.23. *La notation $\|\cdot\|_\infty$ n'indique que la dernière couche de la définition de la norme. Les normes internes utilisées sur chaque composante peuvent ne pas être des normes infinies.*

2. Topologie d'un espace vectoriel normé

2.1 Distance et boules

Définition 2.1 (Distance associée à une norme)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et $(x, y) \in E$. On définit la distance de x à y par :*

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

Proposition 2.2 (Propriétés de la distance)**.** *La distance $d : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifie :*

(i) (séparation) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) (symétrie) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

(iv) (positivité) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) \geq 0$.

Remarque 2.3.
- *La propriété (iv) découle des 3 autres.*