1.4 Normes sur $\mathbb{K}[X]$

Remarque 1.18. *Suivant qu'on s'intéresse à des propriétés algébriques liées aux coefficients, ou analytiques liées aux valeurs de la fonction polynomiale associée, on peut adopter différentes normes sur l'espace des polynômes. En particulier, les normes définies sur $\mathbb{K}^n$ s'adaptent bien, du fait que, même si $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie, les polynômes ont un nombre fini de coefficients non nuls.*

Ainsi, pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ (somme en réalité finie), on peut définir

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}, \quad \|P\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Et dans un contexte plus analytique, on peut définir les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ associées aux fonctions polynomiales définies par les polynômes formels.

La définition des normes séquentielles ci-dessus s'étend à certains sous-espaces de l'espace des suites $\mathbb{K}^N$ (les sous-espaces permettant d'assurer la bonne définition de ces normes).

1.5 Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Remarque 1.19. *L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{n^2}$ (par exemple en mettant les unes au dessus des autres les colonnes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Via cet isomophisme, les normes usuelles de $\mathbb{K}^{n^2}$ se transfèrent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour une matrice $A = (a_{i,j})$, on obtient les normes*

$$\|A\|_1 = \sum_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|.$$

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, défini par*
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j} b_{i,j}.$$
2. *Ces 3 définitions s'étendent aux matrices rectangulaires $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
3. *Dans le cas de matrices carrées, comparer $\|AB\|$ et $\|A\| \cdot \|B\|$ pour ces différentes normes*

Définition 1.20 (Norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$)**.** *Une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ est appelée* norme matricielle *si elle est sous-multiplicative, i.e. :*

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K}^2), \quad \|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Proposition 1.21 (Existence d'une norme matricielle, HP)**.** *Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont matricielles, la normes $\|\cdot\|_\infty$ ne l'est pas.*

Éléments de preuve. - La matrice constituée uniquement de 1 est un contre-exemple pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ - Le cas de $\|\cdot\|_2$ résulte de l'inégalité de CS. Ce résultat est classique (nombreux exercices) mais pas au programme. La démonstration doit donc être connue.

L'existence d'une norme matricielle est d'une grande utilité dans l'étude de convergences de séries matricielles par exemple, notamment des séries faisant intervenir des

puissances d'une matrice A. C'est le cas par exemple de la série exponentielle, permettant de définir l'exponentielle d'une matrice carrée :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Nous justifierons ultérieurement que cette série est convergente (indépendamment de la norme choisie). L'un des points clés (outre l'équivalence des normes en dimension finie) sera de pouvoir majorer $\|A^n\|$ par $\|A\|^n$, pour pouvoir se ramener à la convergence d'une série numérique. Nous définirons dans le chapitre suivant une autre norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$, notée $\|A\|$, et appelée *norme triple*, ou *norme d'opérateur*. □

1.6 Produits d'e.v.n.

Proposition 1.22 (Produit cartésien d'e.v.n.)**.** *Soit $((E_i, N_i))_{i\in[1,n]}$ une famille finie d'e.v.n.. Pour $X = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on définit*

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i), \quad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} N_i(x_i)^2} \quad \textit{et} \quad \|X\|_\infty = \max_{i\in[1,n]} N_i(x_i).$$

Ce sont des normes. La norme $\|\cdot\|_\infty$ ainsi définie est appelée norme produit des normes N_i.

Éléments de preuve. Adaptation facile du cas de $\mathbb{K}^n$. □

Remarque 1.23. *La notation $\|\cdot\|_\infty$ n'indique que la dernière couche de la définition de la norme. Les normes internes utilisées sur chaque composante peuvent ne pas être des normes infinies.*

2. Topologie d'un espace vectoriel normé

2.1 Distance et boules

Définition 2.1 (Distance associée à une norme)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et $(x, y) \in E$. On définit la distance de x à y par :*

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

Proposition 2.2 (Propriétés de la distance)**.** *La distance $d : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifie :*

(i) (séparation) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) (symétrie) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

(iv) (positivité) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) \geq 0$.

Remarque 2.3.
- *La propriété (iv) découle des 3 autres.*