1.3 Normes sur des espaces de fonctions

Proposition 1.13 (Normes sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$)**.** *Pour tout $f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$, on définit*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} f(t).$$

Alors $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes, appelées respectivement :

- *norme de la convergence en moyenne pour $\|\cdot\|_1$;*
- *norme de la convergence en moyenne quadratique pour $\|\cdot\|_2$;*
- *Norme de la convergence uniforme, ou norme norme infinie pour $\|\cdot\|_\infty$.*

Éléments de preuve. Même type de démonstration que dans le cas de la dimension finie □

Remarque 1.14.
1. *Ces normes s'étendent-elle au cas des fonctions continues par morceaux? (la réponse n'est pas forcément la même suivant les normes).*
2. *Dans la définition de $\|\cdot\|_\infty$, le sup est-il un max?*

Définition 1.15 (Parties bornées, applications bornées)**.** *Soit A un ensemble quelconque, $(E,\|\cdot\|)$ un e.v.n., et B une partie quelconque de E.*

(i) On dit que B est bornée s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in B$, $\|x\| \leq M$.

(ii) On dit qu'une application $f \in E^A$ est bornée si son image $Im(f)$ est un sous-ensemble borné de E, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in A, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

On note $B(A,E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E.

Proposition 1.16 (Structure de $\mathcal{B}(A,E)$)**.** *L'ensemble $\mathcal{B}(A,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.17 (Norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A,E)$)**.** *Soit A un ensemble quelconque et $(E,\|\cdot\|)$ un e.v.n.. Pour tout $f \in \mathcal{B}(A,E)$, on définit*

$$\|f\|_\infty = \sup_{a\in A} \|f(a)\|.$$

L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(A,E)$, appelée norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A,E)$.

Éléments de preuve. Même preuve que dans le cas $C^0([a,b],\mathbb{K})$. □

1.4 Normes sur $\mathbb{K}[X]$

Remarque 1.18. *Suivant qu'on s'intéresse à des propriétés algébriques liées aux coefficients, ou analytiques liées aux valeurs de la fonction polynomiale associée, on peut adopter différentes normes sur l'espace des polynômes. En particulier, les normes définies sur $\mathbb{K}^n$ s'adaptent bien, du fait que, même si $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie, les polynômes ont un nombre fini de coefficients non nuls.*

Ainsi, pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ (somme en réalité finie), on peut définir

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}, \quad \|P\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Et dans un contexte plus analytique, on peut définir les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ associées aux fonctions polynomiales définies par les polynômes formels.

La définition des normes séquentielles ci-dessus s'étend à certains sous-espaces de l'espace des suites $\mathbb{K}^N$ (les sous-espaces permettant d'assurer la bonne définition de ces normes).

1.5 Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Remarque 1.19. *L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{n^2}$ (par exemple en mettant les unes au dessus des autres les colonnes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Via cet isomophisme, les normes usuelles de $\mathbb{K}^{n^2}$ se transfèrent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour une matrice $A = (a_{i,j})$, on obtient les normes*

$$\|A\|_1 = \sum_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|.$$

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, défini par*
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j} b_{i,j}.$$
2. *Ces 3 définitions s'étendent aux matrices rectangulaires $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
3. *Dans le cas de matrices carrées, comparer $\|AB\|$ et $\|A\| \cdot \|B\|$ pour ces différentes normes*

Définition 1.20 (Norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$)**.** *Une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ est appelée* norme matricielle *si elle est sous-multiplicative, i.e. :*

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K}^2), \quad \|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Proposition 1.21 (Existence d'une norme matricielle, HP)**.** *Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont matricielles, la normes $\|\cdot\|_\infty$ ne l'est pas.*

Éléments de preuve. - La matrice constituée uniquement de 1 est un contre-exemple pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ - Le cas de $\|\cdot\|_2$ résulte de l'inégalité de CS. Ce résultat est classique (nombreux exercices) mais pas au programme. La démonstration doit donc être connue.

L'existence d'une norme matricielle est d'une grande utilité dans l'étude de convergences de séries matricielles par exemple, notamment des séries faisant intervenir des