1.2 Normes sur des espaces de dimension finie

Proposition 1.9 (Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$)**.** *Soit, pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:*

$$|X|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad |X|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad |X|_\infty = \max_{i\in[1,n]} |x_i|.$$

Alors $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes.

Éléments de preuve. Le seul point un peu délicat est l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On peut se ramener au cas réel en considérant le vecteur $\tilde{X} = ([x_1], \dots, x_n]$. On peut aussi adapter la démonstration du cas réel, en définissant un produit « hermitien » :

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

où $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz se généralise à cette situation, et l'inégalité triangulaire en découle, comme dans le cas réel. □

Remarque 1.10.

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.*
2. *Un même espace vectoriel peut être muni de plusieurs normes ! Comme la notion de convergence est définie à l'aide des normes, elle peut être fortement dépendant du choix de la norme. Ainsi, une suite peut très bien converger pour une norme et pas pour une autre. On verra des exemples en exercice.*

Proposition 1.11 (Normes usuelles sur un espace de dimension finie)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Pour $X \in E$ tel que $[X]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on définit :*

$$|X|_{\mathcal{B},1} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad |X|_{\mathcal{B},2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad |X|_{\mathcal{B},\infty} = \max_{i\in[1,n]} |x_i|.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base, on notera simplement $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

Avertissement 1.12. *Toute norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel n'est pas euclidienne. Par exemple, $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.*

Éléments de preuve. La formule de polarisation donne l'unique candidat à être le produit scalaire associé. Trouver un défaut de bilinéarité. □

1.3 Normes sur des espaces de fonctions

Proposition 1.13 (Normes sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$)**.** *Pour tout $f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$, on définit*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} f(t).$$

Alors $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes, appelées respectivement :

- *norme de la convergence en moyenne pour $\|\cdot\|_1$;*
- *norme de la convergence en moyenne quadratique pour $\|\cdot\|_2$;*
- *Norme de la convergence uniforme, ou norme norme infinie pour $\|\cdot\|_\infty$.*

Éléments de preuve. Même type de démonstration que dans le cas de la dimension finie □

Remarque 1.14.
1. *Ces normes s'étendent-elle au cas des fonctions continues par morceaux? (la réponse n'est pas forcément la même suivant les normes).*
2. *Dans la définition de $\|\cdot\|_\infty$, le sup est-il un max?*

Définition 1.15 (Parties bornées, applications bornées)**.** *Soit A un ensemble quelconque, $(E,\|\cdot\|)$ un e.v.n., et B une partie quelconque de E.*

(i) On dit que B est bornée s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in B$, $\|x\| \leq M$.

(ii) On dit qu'une application $f \in E^A$ est bornée si son image $Im(f)$ est un sous-ensemble borné de E, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in A, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

On note $B(A,E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E.

Proposition 1.16 (Structure de $\mathcal{B}(A,E)$)**.** *L'ensemble $\mathcal{B}(A,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.17 (Norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A,E)$)**.** *Soit A un ensemble quelconque et $(E,\|\cdot\|)$ un e.v.n.. Pour tout $f \in \mathcal{B}(A,E)$, on définit*

$$\|f\|_\infty = \sup_{a\in A} \|f(a)\|.$$

L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(A,E)$, appelée norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A,E)$.

Éléments de preuve. Même preuve que dans le cas $C^0([a,b],\mathbb{K})$. □