1. Normes sur un espace vectoriel

Dans toute cette partie $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.1 (Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $N : E \to \mathbb{R}_+$ une application à valeurs réelles positives. On dit que N est une norme si et seulement si N vérifie les propriétés suivantes :*

(i) (séparation) pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$;
(ii) (homogénéité) pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
(iii) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Proposition 1.2. *Soit $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les points (i), (ii) et (iii) de la propriété précédente. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}, N(x) \geq 0$ (et par conséquent, N est une norme).*

Éléments de preuve. Considérer $N(x + (-x))$ et appliquer les trois points. □

Définition 1.3 (Espace vectoriel normé)**.**

- *Un espace vectoriel normé E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E muni d'une norme $N : E \to \mathbb{R}_+$.*
- *Cette norme sera souvent notée $\|\cdot\|$. Ainsi, pour $x \in E, \|x\|$ désignera la norme de x.*

Exemple 1.4.

- *Si $E = \mathbb{K}, |\cdot|$ est une norme.*
- *Si $E = \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme.*

Proposition 1.5 (Norme euclidienne)**.** *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout x, on note*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur E, appelée norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle , \rangle$.

Éléments de preuve. Pour l'inégalité triangulaire, développer d'un côté $\langle x+y, x+y \rangle$, d'un autre $(\|x\| + \|y\|)^2$ et comparer les deux. □

Proposition 1.6 (Inégalités triangulaires)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors :*

1. *Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \|\sum_{k=1}^n x_k\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$.*
2. *Pour tout $(x, y) \in E^2, \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.*

Lemme 1.7 (Transfert d'une norme)**.** *Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels, et N une norme sur F. Alors l'application N' définie sur E par*

$$N'(x) = N(\varphi(x))$$

est une norme sur E.

Éléments de preuve. Vérifications faciles par linéarité, et caractérisation de l'injectivité par le noyau. □

Corollaire 1.8 (Restriction d'une norme)**.** *Soit N une norme sur E, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction N_F de N à F est une norme sur F. Ainsi, tout sous-espace vectoriel d'un e.v.n. est muni d'une structure d'e.v.n. par restriction de la norme de E.*

1.2 Normes sur des espaces de dimension finie

Proposition 1.9 (Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$)**.** *Soit, pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:*

$$|X|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad |X|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad |X|_\infty = \max_{i\in[1,n]} |x_i|.$$

Alors $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes.

Éléments de preuve. Le seul point un peu délicat est l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On peut se ramener au cas réel en considérant le vecteur $\tilde{X} = ([x_1], \dots, x_n]$. On peut aussi adapter la démonstration du cas réel, en définissant un produit « hermitien » :

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

où $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz se généralise à cette situation, et l'inégalité triangulaire en découle, comme dans le cas réel. □

Remarque 1.10.

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.*
2. *Un même espace vectoriel peut être muni de plusieurs normes ! Comme la notion de convergence est définie à l'aide des normes, elle peut être fortement dépendant du choix de la norme. Ainsi, une suite peut très bien converger pour une norme et pas pour une autre. On verra des exemples en exercice.*

Proposition 1.11 (Normes usuelles sur un espace de dimension finie)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Pour $X \in E$ tel que $[X]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on définit :*

$$|X|_{\mathcal{B},1} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad |X|_{\mathcal{B},2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad |X|_{\mathcal{B},\infty} = \max_{i\in[1,n]} |x_i|.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base, on notera simplement $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

Avertissement 1.12. *Toute norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel n'est pas euclidienne. Par exemple, $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.*

Éléments de preuve. La formule de polarisation donne l'unique candidat à être le produit scalaire associé. Trouver un défaut de bilinéarité. □