Définition III.19 (Rotation d'angle θ)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 2. On dit que $u \in L(E)$ est une rotation d'angle θ s'il existe une b.o.n. B telle que $Mat_B(u) = R(\theta)$. En vertu du lemme précédent, cette définition est indépendante du choix de la b.o.n. B et on aura, pour toute b.o.n. C, $Mat_C(u) = R(\theta)$. On notera ρ_θ la rotation d'angle θ.*
D'après les résultats précédents sur les matrices $R(\theta)$, on obtient $\rho_\theta = \rho_{\theta'}$ si $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

Théorème III.20 (Classification des isométries en dimension 2)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 2. 1. Les éléments de $SO(2)$ sont exactement les rotations. 2. Les éléments de $O(2)\backslash SO(2)$ sont exactement les réflexions.*

Éléments de preuve. Le premier point résulte de la description de $SO_2(\mathbb{R})$ et de la définition des rotations. Pour le second point, une inclusion est déjà acquise. Pour la seconde, constater que $S(\theta)^2 = I_2$, donc les éléments de $O(2)\backslash SO(2)$ sont des symétries. Une propriété précédente caractérise les symétries isométriques parmi toutes les symétries. □

Les règles de produit matriciel dans $SO(2)$ amènent directement les règles de composition des rotations, dont l'interprétation géométrique est assez intuitive :

Proposition III.21 (Inverse et composée de deux rotations)**.** *(i) $\rho_0 = id_E$ (ii) Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}$, $\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'} = \rho_{\theta'} \circ \rho_\theta$ (iii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho_\theta^{-1} = \rho_{-\theta}$.*

Nous pouvons définir la notion d'angle orienté entre deux vecteurs grâce aux rotations. Pour cela, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme III.22. *Soit E un espace euclidien orienté, et soit x et y deux vecteurs de norme 1 de E. Il existe une unique rotation ρ telle que $\rho(x) = y$.*

Éléments de preuve. Si on se fixe une orientation, il existe une unique b.o.n. directe B de premier vecteur x et une unique b.o.n. directe C de premier vecteur y. La rotation ρ doit nécessairement envoyer B sur C. □

Définition III.23 (Angle orienté entre deux vecteurs)**.** *Soit E un espace vectoriel orienté, et x et y deux vecteurs non nuls de E. Alors l'angle orienté (x, y) est l'angle θ, défini modulo 2π, de l'unique rotation ρ telle que*

$$\rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}.$$

Proposition III.24 (Réflexion de matrice $S(\theta)$)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 2, $s \in O(E)\backslash SO(E)$, et $B = (b_1, b_2)$ une b.o.n. de E. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Mat_B(s) = S(\theta)$. Alors, s est la réflexion par rapport à la droite dirigée par un vecteur unitaire u tel que $(\overrightarrow{b_1}, u) = \frac{\theta}{2}$.*

Éléments de preuve. Faire un changement de base pour exprimer s dans l'unique base (u, v) telle que (u, v) soit orthonormale de même orientation que B. Que peut-on dire de la matrice de passage ? □

III.4 Réduction des isométries

On cherche maintenant à décrire toutes les isométries de E. On montre plus précisément qu'un endomorphisme est une isométrie si et seulement s'il existe une b.o.n. dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $1, -1, R(\theta)$.
Dans cette section, E désigne un espace euclidien.

Lemme III.25 (Stabilité des orthogonaux)**.** *Soit u une isométrie, et F un sous-espace stable par u. Alors $F^\perp$ est aussi stable par u.*

Éléments de preuve. Passer par u^*, et le fait que u^{-1} est un isomorphisme. □

Lemme III.26 (Existence d'un sous-espace strict stable). *Soit E de dimension au moins 3, et soit u O(E). Il existe F un sous-espace de E, distinct de {0} et de E, tel que F soit stable par u.*

Éléments de preuve. Considérer un facteur irréductible P de χ_u, de degré d, et un vecteur x Ker(P(u)). Justifier que Vect$(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est stable par u. □

Théorème III.27 (Réduction des isométries). *Soit u une isométrie. Il existe une base orthonormée B, des entiers naturels p, q et k, et des réels $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que $Mat_B(u)$ soit diagonale par blocs de la forme*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & -I_q & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

Réciproquement, tout endomorphisme se réduisant ainsi en base orthonormale est une isométrie.

Éléments de preuve. Par récurrence forte. Puisque le lemme donnant l'existence d'un sous-espace stable strict est valide uniquement à partir de la dimension 3, il faut initialiser pour E de dimension inférieure ou égale à 2. L'étude précédente nous donne le cas dim(E) = 2. □

Corollaire III.28 (Classification des isométries en dimension 3). *Toute isométrie d'un espace euclidien de dimension 3 se réduit sous l'une des formes suivantes, en base orthonormale $B = (b_1, b_2, b_3)$:*
1. Isométrie directe :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$$

(rotation autour de l'axe $b_1, dansleplan Vect(b_2, b_3)$)
2. Isométries indirectes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(rotation autour de l'axe $b_1 etrflexion par rapport Vect(b_2, b_3)$)

Exercice III.29 (Décomposition en valeurs singulières). *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

(a) Montrer que $AA = 0 \iff A = 0$. Dans la suite, on suppose que $A \neq 0$.

(b) Montrer que $A^TA \in S_p^+(\mathbb{R})$ et $AA^T \in S_n^+(\mathbb{R})$.

(c) Montrer : $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}(A^TA)$, $\mathrm{Ker}(A^T) = (\mathrm{Im}A)^\perp$, $\mathrm{rg}(A^TA) = \mathrm{rg}(AA^T)$.

(d) Soit $(V_1, \dots, V_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A^TA respectivement associées aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, rangées telles que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p$ et soit $r = \max\{i \in [1, p], \lambda_i > 0\}$. Pour $i \in [1, r]$, on pose $\beta_i = \sqrt{\lambda_i}$, $U_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} AV_i$, et si $r < n$, on note $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(AA^T)$. Montrer que $(U_1, \dots, U_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(e) Justifier l'existence de matrices orthogonales (définies à l'aide des U_i et V_j), $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $Q \in O_p(\mathbb{R})$, telles que $A = P\Delta Q^T$, où $\Delta \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice rectangulaire constituée d'une diagonale de $\sqrt{\lambda_i}$, où les λ_i sont les valeurs propres non nulles de A^TA, rangées dans l'ordre décroissant. Cette décomposition est appelée décomposition de A en valeurs singulières.