III.2 Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe, nous donnons la description complète des isométries d'un espace de dimension 2. Au passage, nous définirons la notion d'angle dans un espace euclidien de dimension 2 quelconque, en supposant connue la notion d'angle dans le plan euclidien usuel.
Nous donnons dans cette section une description complète des isométries en dimension 2. Pour cela, nous commençons par déterminer les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition III.15 (Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)**.** *(i) Soit $M \in SO(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$;*
(ii) Soit $M \in O(2) \backslash SO(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$;
Ces descriptions sont uniques modulo 2π.

Éléments de preuve. En notant C_1 et C_2 les colonnes de M, C_1 est de norme 1 et peut donc s'écrire $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. Le vecteur C_2 doit être orthogonal à C_1 et unitaire aussi. Cela ne laisse que deux possibilités. □

On note :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition III.16 (Produits dans $O(2)$)**.** *Soit θ, θ' dans $\mathbb{R}$.*
(i) $R(0) = I_2$
(ii) $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$
(iii) $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.
(iv) $S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta')$
(v) $S(\theta)R(\theta') = S(\theta - \theta')$
(vi) $R(\theta)S(\theta') = S(\theta + \theta')$.

Éléments de preuve. Calcul direct et peu intéressant, basé sur les formules de trigonométrie. □

En particulier, on reconnaît en $SO(2)$ un groupe qu'on a déjà rencontré.

Théorème III.17 ($SO(2)$ est isomorphe à U)**.** *L'application qui à $R(\theta)$ associe $e^{i\theta}$ est un isomorphisme de groupe entre $SO(2)$ et U.*
En particulier, $SO(2)$ est commutatif.

Éléments de preuve. Montrer qu'on peut passer $\theta \mapsto R(\theta)$ au quotient (de $\mathbb{R}$ par $2\pi\mathbb{Z}$). □

III.3 Isométries en dimension 2

De l'étude précédente, et de la caractérisation matricielle des isométries, il découle de façon immédiate que l'on sait décrire explicitement toutes les isométries d'un espace euclidien de dimension 2.

Lemme III.18 (Matrices orthogonalement semblables à $R(\theta)$)**.** *La seule matrice orthogonalement semblable à $R(\theta)$ est $R(\theta)$ elle-même.*

Définition III.19 (Rotation d'angle θ)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 2. On dit que $u \in L(E)$ est une rotation d'angle θ s'il existe une b.o.n. B telle que $Mat_B(u) = R(\theta)$. En vertu du lemme précédent, cette définition est indépendante du choix de la b.o.n. B et on aura, pour toute b.o.n. C, $Mat_C(u) = R(\theta)$. On notera ρ_θ la rotation d'angle θ.*
D'après les résultats précédents sur les matrices $R(\theta)$, on obtient $\rho_\theta = \rho_{\theta'}$ si $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

Théorème III.20 (Classification des isométries en dimension 2)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 2. 1. Les éléments de $SO(2)$ sont exactement les rotations. 2. Les éléments de $O(2)\backslash SO(2)$ sont exactement les réflexions.*

Éléments de preuve. Le premier point résulte de la description de $SO_2(\mathbb{R})$ et de la définition des rotations. Pour le second point, une inclusion est déjà acquise. Pour la seconde, constater que $S(\theta)^2 = I_2$, donc les éléments de $O(2)\backslash SO(2)$ sont des symétries. Une propriété précédente caractérise les symétries isométriques parmi toutes les symétries. □

Les règles de produit matriciel dans $SO(2)$ amènent directement les règles de composition des rotations, dont l'interprétation géométrique est assez intuitive :

Proposition III.21 (Inverse et composée de deux rotations)**.** *(i) $\rho_0 = id_E$ (ii) Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}$, $\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'} = \rho_{\theta'} \circ \rho_\theta$ (iii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho_\theta^{-1} = \rho_{-\theta}$.*

Nous pouvons définir la notion d'angle orienté entre deux vecteurs grâce aux rotations. Pour cela, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme III.22. *Soit E un espace euclidien orienté, et soit x et y deux vecteurs de norme 1 de E. Il existe une unique rotation ρ telle que $\rho(x) = y$.*

Éléments de preuve. Si on se fixe une orientation, il existe une unique b.o.n. directe B de premier vecteur x et une unique b.o.n. directe C de premier vecteur y. La rotation ρ doit nécessairement envoyer B sur C. □

Définition III.23 (Angle orienté entre deux vecteurs)**.** *Soit E un espace vectoriel orienté, et x et y deux vecteurs non nuls de E. Alors l'angle orienté (x, y) est l'angle θ, défini modulo 2π, de l'unique rotation ρ telle que*

$$\rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}.$$

Proposition III.24 (Réflexion de matrice $S(\theta)$)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 2, $s \in O(E)\backslash SO(E)$, et $B = (b_1, b_2)$ une b.o.n. de E. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Mat_B(s) = S(\theta)$. Alors, s est la réflexion par rapport à la droite dirigée par un vecteur unitaire u tel que $(\overrightarrow{b_1}, u) = \frac{\theta}{2}$.*

Éléments de preuve. Faire un changement de base pour exprimer s dans l'unique base (u, v) telle que (u, v) soit orthonormale de même orientation que B. Que peut-on dire de la matrice de passage ? □

III.4 Réduction des isométries

On cherche maintenant à décrire toutes les isométries de E. On montre plus précisément qu'un endomorphisme est une isométrie si et seulement s'il existe une b.o.n. dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $1, -1, R(\theta)$.
Dans cette section, E désigne un espace euclidien.

Lemme III.25 (Stabilité des orthogonaux)**.** *Soit u une isométrie, et F un sous-espace stable par u. Alors $F^\perp$ est aussi stable par u.*