III.2 Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe, nous donnons la description complète des isométries d'un espace de dimension 2. Au passage, nous définirons la notion d'angle dans un espace euclidien de dimension 2 quelconque, en supposant connue la notion d'angle dans le plan euclidien usuel.
Nous donnons dans cette section une description complète des isométries en dimension 2. Pour cela, nous commençons par déterminer les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition III.15 (Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)**.** *(i) Soit $M \in SO(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$;*
(ii) Soit $M \in O(2) \backslash SO(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$;
Ces descriptions sont uniques modulo 2π.

Éléments de preuve. En notant C_1 et C_2 les colonnes de M, C_1 est de norme 1 et peut donc s'écrire $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. Le vecteur C_2 doit être orthogonal à C_1 et unitaire aussi. Cela ne laisse que deux possibilités. □

On note :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition III.16 (Produits dans $O(2)$)**.** *Soit θ, θ' dans $\mathbb{R}$.*
(i) $R(0) = I_2$
(ii) $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$
(iii) $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.
(iv) $S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta')$
(v) $S(\theta)R(\theta') = S(\theta - \theta')$
(vi) $R(\theta)S(\theta') = S(\theta + \theta')$.

Éléments de preuve. Calcul direct et peu intéressant, basé sur les formules de trigonométrie. □

En particulier, on reconnaît en $SO(2)$ un groupe qu'on a déjà rencontré.

Théorème III.17 ($SO(2)$ est isomorphe à U)**.** *L'application qui à $R(\theta)$ associe $e^{i\theta}$ est un isomorphisme de groupe entre $SO(2)$ et U.*
En particulier, $SO(2)$ est commutatif.

Éléments de preuve. Montrer qu'on peut passer $\theta \mapsto R(\theta)$ au quotient (de $\mathbb{R}$ par $2\pi\mathbb{Z}$). □

III.3 Isométries en dimension 2

De l'étude précédente, et de la caractérisation matricielle des isométries, il découle de façon immédiate que l'on sait décrire explicitement toutes les isométries d'un espace euclidien de dimension 2.

Lemme III.18 (Matrices orthogonalement semblables à $R(\theta)$)**.** *La seule matrice orthogonalement semblable à $R(\theta)$ est $R(\theta)$ elle-même.*