II.4 Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

Définition II.17 (Endomorphisme autoadjoint positif). *Soit E un espace euclidien, et $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On dit que u est positif (ou semi-défini positif) si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geq 0$. On note $u \geq 0$.*

Définition II.18 (Endomorphisme autoadjoint défini positif). *On dit que u est défini positif si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle u(x), x\rangle > 0$. On note $u > 0$.*

Proposition II.19 (Caractérisation spectrale de la positivité). *Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u \geq 0$ (ii) Toutes les valeurs propres de u sont positives ou nulles. De même, les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u > 0$ (ii) Toutes les valeurs propres de u sont strictement positives.*

Éléments de preuve. Utiliser une base orthonormale de diagonalisation. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. de vecteurs propres avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$, alors pour $x = \sum x_i e_i$, on a $\langle u(x), x\rangle = \sum \lambda_i x_i^2$. Le résultat en découle. □

Proposition II.20 (Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif). *Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint positif. Alors il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2 = u$. On note $v = u^{1/2}$ et on l'appelle racine carrée de u.*

Éléments de preuve. Dans une base orthonormale de diagonalisation $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \geq 0$, définir $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. L'unicité provient du fait que v doit commuter avec u et avoir les mêmes sous-espaces propres. □

III. Isométries vectorielles

III.1 Définitions

Définition III.1 (Isométrie vectorielle). • *Soit E un espace euclidien. Une isométrie vectorielle est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant la norme, c'est-à-dire tel que*

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Une isométrie vectorielle est parfois aussi appelée endomorphisme orthogonal. • On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition III.2 (Structure de $O(E)$; groupe orthogonal). *$(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. Il est appelé groupe orthogonal de E.*

Éléments de preuve. • La conservation de la norme et la séparation des normes permet de décrire facilement $\mathrm{Ker}(u)$, pour $u \in O(E)$. Un argument de dimension montre alors l'inclusion dans $GL(E)$. • La structure de sous-groupe se vérifie facilement ensuite. □

Exemple III.3. *Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ (muni du ps usuel) canoniquement associés à $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont des isométries. Pouvez-vous les décrire géométriquement en analysant l'image de la base canonique ?*
L'exemple de $S(\theta)$ se généralise facilement à tout espace.

Définition III.4 (Symétries orthogonales, réflexions). *Soit E un espace euclidien, et $s \in \mathcal{L}(E)$. • s est une symétrie orthogonale ssi il existe un sous-espace F de E tel que s soit la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$. • s est une réflexion si et seulement si s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan P.*

Remarque III.5. • *Une symétrie orthogonale par rapport à une droite D est appelée symétrie d'axe D.* • *Une symétrie orthogonale (mais il n'y a pas trop le choix...) par rapport à $\{0\}$ est appelée symétrie centrale.*

Proposition III.6 (Les symétries orthogonales sont des isométries)**.** *Toute symétrie orthogonale est une isométrie.*

Éléments de preuve. Décomposer $x = x_F + x_{F^\perp}$, exprimer $s(x)$ à l'aide de cette décomposition, et comparer $\|x\|$ et $\|s(x)\|$ grâce au théorème de Pythagore. □

Proposition III.7 (Caractérisations des isométries)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes: (i) $u \in O(E)$ (ii) $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ (caractérisation par conservation du produit scalaire) (iii) pour toute b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, la famille $u(\mathcal{B}) = (u(b_1), \dots, u(b_n))$ est encore une b.o.n. (caractérisation par l'image des bases orthonormales); (iv) il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ telle que $u(\mathcal{B}) = (u(b_1), \dots, u(b_n))$ soit encore une b.o.n. (caractérisation par l'image d'une base orthonormale); (v) pour toute b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $Mat_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$; (caractérisation par sa matrice dans toute base orthonormale) (vi) il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$; (caractérisation par sa matrice dans une base orthonormale) (vii) $u^* = u^{-1}$ (caractérisation par l'adjoint)*

Éléments de preuve. • $(i) \implies (ii)$ en considérant $\|u(x+y)\|$. La réciproque est évidente. • $(ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (vi) \implies (v) \implies (vii) \implies (ii)$; ce n'est évidemment pas le seul parcours possible. □

Remarque III.8. *1. En particulier, le point (ii) assure qu'une isométrie conserve l'orthogonalité. Mais la conservation de l'orthogonalité n'est pas suffisante pour caractériser les isométries. 2. Les points (v) et (vi) justifient la terminologie « endomorphisme orthogonal ». Le programme mentionne les deux terminologies, mais stipule de privilégier « isométrie vectorielle ». 3. Les points (v) et (vi) justifient également la ressemblance de notation et la correspondance des terminologies utilisées pour désigner le groupe des isométries et le groupe des matrices orthogonales. Plus précisément, $u \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme entre $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$.*

Exemple III.9. • *Soit s une symétrie orthogonale. Trouver une b.o.n. dans laquelle $Mat_B(s)$ est orthogonale. Remarquez que cela propose une alternative à la preuve précédente du caractère isométrique des symétries orthogonales.* • *Une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale ssi $s^* = s$*
Ce dernier point permet de caractériser les symétries qui sont des isométries.

Proposition III.10 (Caractérisation des symétries isométriques)**.** *Soit s une symétrie de E. Alors s est une isométrie ssi s est une symétrie orthogonale.*

Les points (v) et (vi) donnent accès au déterminant d'une isométrie vectorielle.

Proposition III.11 (Isométries directes et indirectes)**.** *Soit $u \in O(E)$. Alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$.* • *Si $\det(u) = 1$, on dit que u est une isométrie directe.* • *Si $\det(u) = -1$, on dit que u est une isométrie indirecte.*

Définition III.12 (Groupe spécial orthogonal)**.** *On note $SO(E)$ l'ensemble des isométries directes de E. C'est un sous-groupe de $O(E)$, appelé groupe spécial orthogonal.*

Remarque III.13. • *L'égalité $|\det(u)| = 1$ est assez naturelle, puisque le déterminant calcule l'effet sur les volumes de l'endomorphisme u : $\det(u)$ est le coefficient de proportionnalité entre le volume orienté du parallélotope engendré par $(x_1, \dots, x_n)$ et le volume orienté du parallélotope engendré par $(u(x_1), \dots, u(x_n))$. Ainsi, l'égalité $|\det(u)| = 1$ ne fait que traduire le fait qu'une isométrie conserve les configurations spatiales, et donc les volumes.* • *Les isométries directes sont celles qui conservent l'orientation des b.o.n., les isométries indirectes sont celles qui inversent l'orientation des b.o.n.*

Exemple III.14. • *Caractériser les symétries orthogonales qui sont dans $SO(E)$.* • *Une réflexion est-elle une isométrie directe ?* • *À quelle condition sur E une symétrie d'axe D est-elle une isométrie directe ?*

III.2 Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe, nous donnons la description complète des isométries d'un espace de dimension 2. Au passage, nous définirons la notion d'angle dans un espace euclidien de dimension 2 quelconque, en supposant connue la notion d'angle dans le plan euclidien usuel.
Nous donnons dans cette section une description complète des isométries en dimension 2. Pour cela, nous commençons par déterminer les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition III.15 (Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)**.** *(i) Soit $M \in SO(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$;*
(ii) Soit $M \in O(2) \backslash SO(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$;
Ces descriptions sont uniques modulo 2π.

Éléments de preuve. En notant C_1 et C_2 les colonnes de M, C_1 est de norme 1 et peut donc s'écrire $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. Le vecteur C_2 doit être orthogonal à C_1 et unitaire aussi. Cela ne laisse que deux possibilités. □

On note :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition III.16 (Produits dans $O(2)$)**.** *Soit θ, θ' dans $\mathbb{R}$.*
(i) $R(0) = I_2$
(ii) $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$
(iii) $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.
(iv) $S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta')$
(v) $S(\theta)R(\theta') = S(\theta - \theta')$
(vi) $R(\theta)S(\theta') = S(\theta + \theta')$.

Éléments de preuve. Calcul direct et peu intéressant, basé sur les formules de trigonométrie. □

En particulier, on reconnaît en $SO(2)$ un groupe qu'on a déjà rencontré.

Théorème III.17 ($SO(2)$ est isomorphe à U)**.** *L'application qui à $R(\theta)$ associe $e^{i\theta}$ est un isomorphisme de groupe entre $SO(2)$ et U.*
En particulier, $SO(2)$ est commutatif.

Éléments de preuve. Montrer qu'on peut passer $\theta \mapsto R(\theta)$ au quotient (de $\mathbb{R}$ par $2\pi\mathbb{Z}$). □

III.3 Isométries en dimension 2

De l'étude précédente, et de la caractérisation matricielle des isométries, il découle de façon immédiate que l'on sait décrire explicitement toutes les isométries d'un espace euclidien de dimension 2.

Lemme III.18 (Matrices orthogonalement semblables à $R(\theta)$)**.** *La seule matrice orthogonalement semblable à $R(\theta)$ est $R(\theta)$ elle-même.*