II.4 Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

Définition II.17 (Endomorphisme autoadjoint positif). *Soit E un espace euclidien, et $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On dit que u est positif (ou semi-défini positif) si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geq 0$. On note $u \geq 0$.*

Définition II.18 (Endomorphisme autoadjoint défini positif). *On dit que u est défini positif si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle u(x), x\rangle > 0$. On note $u > 0$.*

Proposition II.19 (Caractérisation spectrale de la positivité). *Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u \geq 0$ (ii) Toutes les valeurs propres de u sont positives ou nulles. De même, les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u > 0$ (ii) Toutes les valeurs propres de u sont strictement positives.*

Éléments de preuve. Utiliser une base orthonormale de diagonalisation. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. de vecteurs propres avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$, alors pour $x = \sum x_i e_i$, on a $\langle u(x), x\rangle = \sum \lambda_i x_i^2$. Le résultat en découle. □

Proposition II.20 (Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif). *Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint positif. Alors il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2 = u$. On note $v = u^{1/2}$ et on l'appelle racine carrée de u.*

Éléments de preuve. Dans une base orthonormale de diagonalisation $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \geq 0$, définir $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. L'unicité provient du fait que v doit commuter avec u et avoir les mêmes sous-espaces propres. □

III. Isométries vectorielles

III.1 Définitions

Définition III.1 (Isométrie vectorielle). • *Soit E un espace euclidien. Une isométrie vectorielle est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant la norme, c'est-à-dire tel que*

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Une isométrie vectorielle est parfois aussi appelée endomorphisme orthogonal. • On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition III.2 (Structure de $O(E)$; groupe orthogonal). *$(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. Il est appelé groupe orthogonal de E.*

Éléments de preuve. • La conservation de la norme et la séparation des normes permet de décrire facilement $\mathrm{Ker}(u)$, pour $u \in O(E)$. Un argument de dimension montre alors l'inclusion dans $GL(E)$. • La structure de sous-groupe se vérifie facilement ensuite. □

Exemple III.3. *Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ (muni du ps usuel) canoniquement associés à $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont des isométries. Pouvez-vous les décrire géométriquement en analysant l'image de la base canonique ?*
L'exemple de $S(\theta)$ se généralise facilement à tout espace.

Définition III.4 (Symétries orthogonales, réflexions). *Soit E un espace euclidien, et $s \in \mathcal{L}(E)$. • s est une symétrie orthogonale ssi il existe un sous-espace F de E tel que s soit la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$. • s est une réflexion si et seulement si s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan P.*