Prenons $x \in F$, $x \neq 0$. Alors x et Ax sont linéairement indépendants (car sinon x serait vecteur propre réel). Soit $P = \text{vect}(x, Ax) \subset F$. C'est un plan stable par A.

Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de P. Dans cette base, la matrice de $A|_P$ est :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

car M est symétrique. Son polynôme caractéristique est :

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$$

Le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$$

Donc P_M est scindé sur $\mathbb{R}$.

De plus, $P^\perp$ est stable par A (car A est symétrique) et $A|_{P^\perp}$ est symétrique réelle de dimension $n-1$. Par hypothèse de récurrence, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $P_A = P_{A|_P} \cdot P_{A|_{P^\perp}}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Absurde car on a supposé dans le cas 2 que P_A n'admet pas de racines.

Conclusion: P_A est scindé sur $\mathbb{R}$ car seul le premier cas est possible. □

II.3 Théorème spectral

Le théorème spectral est un résultat fondamental de la théorie des espaces euclidiens. Il affirme que les endomorphismes autoadjoints sont diagonalisables en base orthonormale.

Théorème II.15 (Théorème spectral)**.** *Soit E un espace euclidien, et $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors u est diagonalisable en base orthonormale. Plus précisément, il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.*

Éléments de preuve. On peut procéder par récurrence sur la dimension de E. - Initialisation : en dimension 1, c'est évident. - Hérédité : soit E de dimension $n \geq 2$, et supposons le théorème vrai pour tout espace euclidien de dimension $< n$. - Le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$, donc u admet au moins une valeur propre réelle λ. - Soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à λ. - Soit $F = \text{Vect}(e_1)^\perp$. Alors F est stable par u (car u est autoadjoint). - La restriction $u|_F$ est un endomorphisme autoadjoint de F (qui est un espace euclidien de dimension $n-1$). - Par hypothèse de récurrence, $u|_F$ est diagonalisable en base orthonormale de F. - En concaténant e_1 avec cette base de F, on obtient une b.o.n. de E constituée de vecteurs propres de u. □

Corollaire II.16 (Diagonalisation orthogonale des matrices symétriques réelles)**.** *Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable. C'est-à-dire : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = P^TAP$ soit diagonale.*

Éléments de preuve. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormale pour le produit scalaire canonique). Appliquer le théorème spectral. □

II.4 Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

Définition II.17 (Endomorphisme autoadjoint positif). *Soit E un espace euclidien, et $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On dit que u est positif (ou semi-défini positif) si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geq 0$. On note $u \geq 0$.*

Définition II.18 (Endomorphisme autoadjoint défini positif). *On dit que u est défini positif si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle u(x), x\rangle > 0$. On note $u > 0$.*

Proposition II.19 (Caractérisation spectrale de la positivité). *Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u \geq 0$ (ii) Toutes les valeurs propres de u sont positives ou nulles. De même, les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u > 0$ (ii) Toutes les valeurs propres de u sont strictement positives.*

Éléments de preuve. Utiliser une base orthonormale de diagonalisation. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. de vecteurs propres avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$, alors pour $x = \sum x_i e_i$, on a $\langle u(x), x\rangle = \sum \lambda_i x_i^2$. Le résultat en découle. □

Proposition II.20 (Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif). *Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint positif. Alors il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2 = u$. On note $v = u^{1/2}$ et on l'appelle racine carrée de u.*

Éléments de preuve. Dans une base orthonormale de diagonalisation $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \geq 0$, définir $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. L'unicité provient du fait que v doit commuter avec u et avoir les mêmes sous-espaces propres. □

III. Isométries vectorielles

III.1 Définitions

Définition III.1 (Isométrie vectorielle). • *Soit E un espace euclidien. Une isométrie vectorielle est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant la norme, c'est-à-dire tel que*

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Une isométrie vectorielle est parfois aussi appelée endomorphisme orthogonal. • On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition III.2 (Structure de $O(E)$; groupe orthogonal). *$(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. Il est appelé groupe orthogonal de E.*

Éléments de preuve. • La conservation de la norme et la séparation des normes permet de décrire facilement $\mathrm{Ker}(u)$, pour $u \in O(E)$. Un argument de dimension montre alors l'inclusion dans $GL(E)$. • La structure de sous-groupe se vérifie facilement ensuite. □

Exemple III.3. *Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ (muni du ps usuel) canoniquement associés à $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont des isométries. Pouvez-vous les décrire géométriquement en analysant l'image de la base canonique ?*
L'exemple de $S(\theta)$ se généralise facilement à tout espace.

Définition III.4 (Symétries orthogonales, réflexions). *Soit E un espace euclidien, et $s \in \mathcal{L}(E)$. • s est une symétrie orthogonale ssi il existe un sous-espace F de E tel que s soit la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$. • s est une réflexion si et seulement si s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan P.*