## II.2 Endomorphismes autoadjoints

*Une situation particulière importante est le cas des endomorphismes égaux à leur adjoint.*

**Définition II.10** (Endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $u$ est un endomorphisme autoadjoint (ou endomorphisme symétrique) si $u = u^*$. On note $S(E)$ l'ensemble des automorphismes auto-adjoints de $E$.*

**Remarque II.11.** *La notation utilisée se réfère à la terminologie « endomorphisme syémétique », qui s'explique par l'aspect matriciel évoqué ci-dessous. Mais le programme officiel stipule explicitement de privilégier la terminologie « endomorphisme autoadjoint ».*

*La propriété de stabilité des supplémentaires orthogonaux se réexprime dans ce contexte de la façon suivante :*

**Proposition II.12** (Orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit $E$ un espace euclidien, et $u$ en endomorphisme autoadjoint de $E$. Soit $F$ un sous-espace de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $F$ est stable par $u$ (ii) $F^\perp$ est stable par $u$.*

Éléments de preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition analogue pour les endomorphismes quelconques, en utilisant $u = u^*$. □

**Proposition II.13** (Matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une b.o.n.)**.** *Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $B$ une b.o.n. de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u$ est autoadjoint (ii) $Mat_B(u)$ est symétrique.*

Éléments de preuve. On a $\text{Mat}_B(u^*) = \text{Mat}_B(u)^T$. Donc $u = u^*$ ssi $\text{Mat}_B(u) = \text{Mat}_B(u)^T$. □

**Proposition II.14** (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $E$. Alors le polynôme caractéristique de $u$ est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Éléments de preuve. Procédons par récurrence sur la dimension $n$ de l'espace.
**Cas de base :** Pour $n = 1$, le polynôme caractéristique est de degré 1 à coefficients réels, donc scindé sur $\mathbb{R}$.
**Hérédité :** Supposons que toute matrice symétrique réelle de dimension $\leq n$ ait son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$, et considérons $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ symétrique réelle.
Soit $P_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ son polynôme caractéristique. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, $P_A$ se décompose en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de degré 1 ou 2.

- **Cas 1 :** $P_A$ admet un facteur irréductible de degré 1, soit $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P_A(X) = (X - \lambda)Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. Soit $v$ un vecteur propre réel pour $\lambda$. Dans une base orthonormée commençant par $v$, la matrice $A$ s'écrit :

  $$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

  où $B$ est symétrique réelle de taille $n$ (ceci vient du fait que $A^T = A$). Par hypothèse de récurrence, le polynôme caractéristique de $B$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $P_A(X) = (X-\lambda)P_B(X)$ l'est aussi.

- **Cas 2 :** Tous les facteurs irréductibles de $P_A$ sont de degré 2. Considérons l'un d'eux : $Q(X) = X^2 + pX + q$ avec $p^2 - 4q < 0$. Soit $F = \ker Q(A)$.

  Montrons que $F$ est stable par $A$ : si $x \in F$, alors $Q(A)x = 0$, et $A(Q(A)x) = Q(A)(Ax) = 0$, donc $Ax \in F$.

Prenons $x \in F$, $x \neq 0$. Alors $x$ et $Ax$ sont linéairement indépendants (car sinon $x$ serait vecteur propre réel). Soit $P = \text{vect}(x, Ax) \subset F$. C'est un plan stable par $A$.

Soit $(e_1, e_2)$ une base orthonormée de $P$. Dans cette base, la matrice de $A|_P$ est :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

car $M$ est symétrique. Son polynôme caractéristique est :

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$$

Le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$$

Donc $P_M$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

De plus, $P^\perp$ est stable par $A$ (car $A$ est symétrique) et $A|_{P^\perp}$ est symétrique réelle de dimension $n-1$. Par hypothèse de récurrence, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $P_A = P_{A|_P} \cdot P_{A|_{P^\perp}}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Absurde car on a supposé dans le cas 2 que $P_A$ n'admet pas de racines.

Conclusion: $P_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ car seul le premier cas est possible. □

## II.3 Théorème spectral

*Le théorème spectral est un résultat fondamental de la théorie des espaces euclidiens. Il affirme que les endomorphismes autoadjoints sont diagonalisables en base orthonormale.*

**Théorème II.15** (Théorème spectral)**.** *Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors $u$ est diagonalisable en base orthonormale. Plus précisément, il existe une base orthonormale de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$.*

Éléments de preuve. On peut procéder par récurrence sur la dimension de $E$. - Initialisation : en dimension 1, c'est évident. - Hérédité : soit $E$ de dimension $n \geq 2$, et supposons le théorème vrai pour tout espace euclidien de dimension $< n$. - Le polynôme caractéristique de $u$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $u$ admet au moins une valeur propre réelle $\lambda$. - Soit $e_1$ un vecteur propre unitaire associé à $\lambda$. - Soit $F = \text{Vect}(e_1)^\perp$. Alors $F$ est stable par $u$ (car $u$ est autoadjoint). - La restriction $u|_F$ est un endomorphisme autoadjoint de $F$ (qui est un espace euclidien de dimension $n-1$). - Par hypothèse de récurrence, $u|_F$ est diagonalisable en base orthonormale de $F$. - En concaténant $e_1$ avec cette base de $F$, on obtient une b.o.n. de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$. □

**Corollaire II.16** (Diagonalisation orthogonale des matrices symétriques réelles)**.** *Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable. C'est-à-dire : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = P^TAP$ soit diagonale.*

Éléments de preuve. Interpréter $A$ comme la matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormale pour le produit scalaire canonique). Appliquer le théorème spectral. □