**Exercice I.42** (Inégalités sur les coefficients d'une matrice orthogonale). *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

**Exercice I.43** (Décomposition QR). *Montrer que toute matrice inversible $M \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose sous la forme $M = QR$, où $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in B_n(\mathbb{R})$, $B_n(\mathbb{R})$ étant le sous-groupe de Borel, constitué des matrices triangulaires supérieures inversibles.*

### I.6 Orientation d'un espace

**Définition I.44** (Orientation d'un espace). *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. 1. La relation $BRB' \iff det_B(B') > 0$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de $E$ 2. Cette relation d'équivalence possède exactement deux classes d'équivalence 3. On dira que $B$ et $B'$ ont même orientation si elles appartiennent à la même classe d'équivalence. 4. Une orientation de $E$ est alors le choix arbitraire d'une de ces deux classes d'équivalence, qu'on fait généralement en se donnant une base de référence $B_0$. 5. Ainsi, étant donné une base de référence $B_0$, une base $B$ est directe si $det_{B_0}(B) > 0$, et indirecte si $det_{B_0}(B) > 0$.*
*Ainsi, orienter l'espace $E$ consiste à choisir une base de référence $B_0$. Toute base de la même orientation que $B_0$ sera alors appelée base directe.*

**Proposition I.45** (Caractérisation de l'orientation pour les b.o.n.). *Soit $B$ et $B'$ deux b.o.n. d'un espace euclidien $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes: (i) $B$ et $B'$ ont même orientation ; (ii) $Mat_B(B') \in SO(n)$ (iii) $det_B(B') = 1$ (iv) $det_B = det_B$.*

**Définition I.46** (Produit mixte dans un espace euclidien orienté). *Soit $E$ un espace euclidien orienté, et $B$ une b.o.n. directe. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Le produit mixte de $(u_1, \dots, u_n)$ est défini par :*

$$[u_1, \dots, u_n] = det_B(u_1, \dots, u_n).$$

*Cette définition est indépendante du choix de la b.o.n. directe $B$.*

## II. Endomorphismes autoadjoints

### II.1 Adjoint d'un endomorphisme

**Théorème II.1** (Théorème de représentation de Riesz). *Soit $E$ un espace euclidien, et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire sur $E$. Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\varphi = \langle a, \cdot\rangle$. Plus précisément, $a \mapsto \varphi_a = \langle a, \cdot\rangle$ est un isomorphisme de $E$ dans $E^*$.*

**Définition II.2** (Adjoint d'un endomorphisme). *Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$.*
*1. Pour tout $x \in E$ : - l'application $y \mapsto \langle x, u(y)\rangle$ est une forme linéaire ; - il existe un unique vecteur $u^*(x) \in E$ tel que pour tout $y \in E, \langle x, u(y)\rangle = \langle u^*(x), y\rangle$.*
*2. L'application $u^* : x \mapsto u^*(x)$ est un endomorphisme de $E$.*
*3. L'endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ est appelé adjoint de l'endomorphisme $u$.*

Éléments de preuve. Le premier point est une vérification élémentaire. Le second provient du théorème de représentation de Riesz. Le fait que $u^*$ soit un endomorphisme provient de l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz, en constatant que $\lambda u^*(x) + u^*(x')$ répond au problème de la représentation de la forme linéaire $\langle \lambda x + x', \cdot\rangle$. □

**Proposition II.3** (Adjoint d'une composée). *Soit $E$ un espace euclidien, et $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$. Alors*

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$$

Éléments de preuve. Vérifier que $\langle u^* \circ v^*(x), y\rangle = \langle x, v \circ u\rangle$, égalité qui caractérise l'adjoint $(v \circ u)^*$. □

**Proposition II.4** (Double-adjoint). *L'application $u \mapsto u^*$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même est involutif. En d'autres termes, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,*

$$(u^*)^* = u.$$

Éléments de preuve. Simplifier $\langle (u^*) * (x), y\rangle$. La symétrie du produit scalaire pourra être utile pour se ramener de façon précise à la définition. □

**Proposition II.5** (Stabilité par $u^*$ de l'orthogonal d'un sous-espace stable). *Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $F$ un sous-espace de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes: (i) $F$ est stable par $u$ (ii) $F^\perp$ est stable par $u^*$.*

Éléments de preuve. Sens direct : calculer $\langle u^*(x), y\rangle$ pour $x \in F^\perp$ et $y \in F$. Sens réciproque : cela se ramène au sens direct, par involutivité du passage à l'adjoint et du passage au supplémentaire orthogonal. □

**Proposition II.6** (Relations entre images et noyaux). *Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

$$Ker(u^*) = (Im(u))^\perp \quad et \quad Im(u^*) = Ker(u)^\perp.$$

Éléments de preuve. La première égalité provient de l'équivalence $x \in \mathrm{Ker}(u^*)$ ssi $\forall y \in E, \langle u^*(x), y\rangle = 0$, puis utiliser la définition de l'adjoint. La seconde égalité se ramène à la première en remplaçant $u$ par $u^*$. □

**Corollaire II.7** (Rang d'un adjoint). *Soit $E$ un espace euclidien, et $u$ un endomorphisme de $E$. Alors*

$$rg(u^*) = rg(u).$$

*Une interprétation matricielle permet de relier ce résultat à un résultat déjà connu, démontré de façon algorithmique.*

**Proposition II.8** (Représentation matricielle d'un adjoint). *Soit $E$ un espace euclidien, muni d'une base orthonormale $B$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

$$Mat_B(u^*) = Mat_B(u)^T.$$

Éléments de preuve. Les formes bilinéaires $(x, y) \mapsto \langle u^*(x), y\rangle$ et $(x, y) \mapsto \langle x, u(y)\rangle$ ont des matrices dans $B$ respectivement associées à $\mathrm{Mat}_B(u^*)$. Et à $\mathrm{Mat}_B(u)$, et sont égales.
L'égalité des rangs de $u$ et $u^*$ provient alors de l'invariance du rang par transposition. Ce résultat est plus général que celui qu'on a prouvé ci-dessus (car valide pour des matrices de tout format), mais la démonstration ci-dessus donne un éclairage géométrique à un résultat qui sinon reste purement algorithmique. D'ailleurs, on pourrait adapter cette démonstration à la situation générale, en considérant des applications linéaires entre 2 espaces euclidiens $E$ et $F$. Le déterminant, la trace, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont aussi invariants par transposition. On obtient donc : □

**Proposition II.9** (Rang, trace, déterminant, spectre d'un adjoint). *Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*
*1. $rg(u^*) = rg(u)$ 2. $tr(u^*) = tr(u)$ 3. $det(u^*) = det(u)$ 4. $\mu_u^* = \mu_u$ 5. $\chi_u^* = \chi_u$ 6. Sp(u*) = Sp(u), avec égalité des multiplicités (algébriques).*

## II.2 Endomorphismes autoadjoints

*Une situation particulière importante est le cas des endomorphismes égaux à leur adjoint.*

**Définition II.10** (Endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $u$ est un endomorphisme autoadjoint (ou endomorphisme symétrique) si $u = u^*$. On note $S(E)$ l'ensemble des automorphismes auto-adjoints de $E$.*

**Remarque II.11.** *La notation utilisée se réfère à la terminologie « endomorphisme syémétique », qui s'explique par l'aspect matriciel évoqué ci-dessous. Mais le programme officiel stipule explicitement de privilégier la terminologie « endomorphisme autoadjoint ».*

*La propriété de stabilité des supplémentaires orthogonaux se réexprime dans ce contexte de la façon suivante :*

**Proposition II.12** (Orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit $E$ un espace euclidien, et $u$ en endomorphisme autoadjoint de $E$. Soit $F$ un sous-espace de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $F$ est stable par $u$ (ii) $F^\perp$ est stable par $u$.*

Éléments de preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition analogue pour les endomorphismes quelconques, en utilisant $u = u^*$. □

**Proposition II.13** (Matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une b.o.n.)**.** *Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $B$ une b.o.n. de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u$ est autoadjoint (ii) $Mat_B(u)$ est symétrique.*

Éléments de preuve. On a $\text{Mat}_B(u^*) = \text{Mat}_B(u)^T$. Donc $u = u^*$ ssi $\text{Mat}_B(u) = \text{Mat}_B(u)^T$. □

**Proposition II.14** (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $E$. Alors le polynôme caractéristique de $u$ est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Éléments de preuve. Procédons par récurrence sur la dimension $n$ de l'espace.
**Cas de base :** Pour $n = 1$, le polynôme caractéristique est de degré 1 à coefficients réels, donc scindé sur $\mathbb{R}$.
**Hérédité :** Supposons que toute matrice symétrique réelle de dimension $\leq n$ ait son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$, et considérons $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ symétrique réelle.
Soit $P_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ son polynôme caractéristique. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, $P_A$ se décompose en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de degré 1 ou 2.

- **Cas 1 :** $P_A$ admet un facteur irréductible de degré 1, soit $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P_A(X) = (X - \lambda)Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. Soit $v$ un vecteur propre réel pour $\lambda$. Dans une base orthonormée commençant par $v$, la matrice $A$ s'écrit :

  $$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

  où $B$ est symétrique réelle de taille $n$ (ceci vient du fait que $A^T = A$). Par hypothèse de récurrence, le polynôme caractéristique de $B$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $P_A(X) = (X-\lambda)P_B(X)$ l'est aussi.

- **Cas 2 :** Tous les facteurs irréductibles de $P_A$ sont de degré 2. Considérons l'un d'eux : $Q(X) = X^2 + pX + q$ avec $p^2 - 4q < 0$. Soit $F = \ker Q(A)$.

  Montrons que $F$ est stable par $A$ : si $x \in F$, alors $Q(A)x = 0$, et $A(Q(A)x) = Q(A)(Ax) = 0$, donc $Ax \in F$.