Exercice I.42 (Inégalités sur les coefficients d'une matrice orthogonale). *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

Exercice I.43 (Décomposition QR). *Montrer que toute matrice inversible $M \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose sous la forme $M = QR$, où $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in B_n(\mathbb{R})$, $B_n(\mathbb{R})$ étant le sous-groupe de Borel, constitué des matrices triangulaires supérieures inversibles.*

I.6 Orientation d'un espace

Définition I.44 (Orientation d'un espace). *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. 1. La relation $BRB' \iff det_B(B') > 0$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E 2. Cette relation d'équivalence possède exactement deux classes d'équivalence 3. On dira que B et B' ont même orientation si elles appartiennent à la même classe d'équivalence. 4. Une orientation de E est alors le choix arbitraire d'une de ces deux classes d'équivalence, qu'on fait généralement en se donnant une base de référence B_0. 5. Ainsi, étant donné une base de référence B_0, une base B est directe si $det_{B_0}(B) > 0$, et indirecte si $det_{B_0}(B) > 0$.*
Ainsi, orienter l'espace E consiste à choisir une base de référence B_0. Toute base de la même orientation que B_0 sera alors appelée base directe.

Proposition I.45 (Caractérisation de l'orientation pour les b.o.n.). *Soit B et B' deux b.o.n. d'un espace euclidien E. Les propositions suivantes sont équivalentes: (i) B et B' ont même orientation ; (ii) $Mat_B(B') \in SO(n)$ (iii) $det_B(B') = 1$ (iv) $det_B = det_B$.*

Définition I.46 (Produit mixte dans un espace euclidien orienté). *Soit E un espace euclidien orienté, et B une b.o.n. directe. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Le produit mixte de $(u_1, \dots, u_n)$ est défini par :*

$$[u_1, \dots, u_n] = det_B(u_1, \dots, u_n).$$

Cette définition est indépendante du choix de la b.o.n. directe B.

II. Endomorphismes autoadjoints

II.1 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème II.1 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit E un espace euclidien, et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire sur E. Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\varphi = \langle a, \cdot\rangle$. Plus précisément, $a \mapsto \varphi_a = \langle a, \cdot\rangle$ est un isomorphisme de E dans E^*.*

Définition II.2 (Adjoint d'un endomorphisme). *Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$.*
1. Pour tout $x \in E$: - l'application $y \mapsto \langle x, u(y)\rangle$ est une forme linéaire ; - il existe un unique vecteur $u^*(x) \in E$ tel que pour tout $y \in E, \langle x, u(y)\rangle = \langle u^*(x), y\rangle$.
2. L'application $u^* : x \mapsto u^*(x)$ est un endomorphisme de E.
3. L'endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ est appelé adjoint de l'endomorphisme u.

Éléments de preuve. Le premier point est une vérification élémentaire. Le second provient du théorème de représentation de Riesz. Le fait que u^* soit un endomorphisme provient de l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz, en constatant que $\lambda u^*(x) + u^*(x')$ répond au problème de la représentation de la forme linéaire $\langle \lambda x + x', \cdot\rangle$. □

Proposition II.3 (Adjoint d'une composée). *Soit E un espace euclidien, et u et v deux endomorphismes de E. Alors*

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$$