Ainsi, si B est une b.o.n. et si

$$X = [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad Y = [y]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sont les coordonnées de x et y dans la b.o.n. B, le produit scalaire et la norme s'expriment par les formules usuelles :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y \quad \textit{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^\top X.$$

Ces relations traduisent le fait que la matrice du produit scalaire dans une base orthonormale pour ce produit scalaire est égale à I_n.

Théorème I.26 (Matrice d'un endomorphisme relativement à une b.o.n.)**.** *Soit E un espace euclidien muni d'une b.o.n. $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Soit $u \in L(E)$. Alors :*

$$\textit{Mat}_B(u) = (\langle b_i, u(b_j)\rangle)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \langle b_1, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_1, u(b_n)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_n, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_n, u(b_n)\rangle \end{pmatrix}$$

I.5 Changements de base orthonormales, matrices orthogonales

Théorème I.27 (propriété des matrices de passage d'une b.o.n. à une autre)**.** *Soit B et C deux bases de E. Soit $P = P_B^c$ la matrice de passage de la base B à la base C. Alors :*

$$P^\top P = I_n = PP^\top, \quad \textit{donc:} \quad P^{-1} = P^\top.$$

Éléments de preuve. Utiliser la formule de changement de base pour la matrice du ps dans les bases B et C. On peut aussi le retrouver à l'aide de la description explicite de P_B^c et des expressions des $\langle c_i, c_j\rangle$ en b.o.n. B. □

Définition I.28 (Matrice orthogonale)**.** *Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que P est une matrice orthogonale si et seulement si $P^\top P = I_n$.*

Exemple I.29. *1. Dans $M_n(\mathbb{R})$, les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$*
2. La matrice I_n, la matrice $-I_n$, et plus généralement, toute matrice obtenue de I_n en changeant les signes de certains de ses coefficients diagonaux, et en permutant les colonnes.

De la définition même découle de façon immédiate :

Proposition I.30 (Inverse d'une matrice orthogonale)**.** *Soit P une matrice orthogonale. Alors P est inversible, et $P^{-1} = P^\top$.*

Une matrice orthogonale peut se caractériser également par l'orthonormalité de ses colonnes ou ses lignes :

Théorème I.31 (Caractérisation d'une matrice orthogonale par ses colonnes ou lignes)**.** *Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) P est orthogonale (ii) $P^\top$ est orthogonale (iii) Les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n \simeq M_{n,1}(\mathbb{R})$ (iv) Les lignes de P forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n \simeq M_{1,n}(\mathbb{R})$.

Théorème I.32 (Caractérisation des matrices de passage entre b.o.n. par orthogonalité)**.** *Soit E un espace euclidien.*
1. Toute matrice de passage d'une b.o.n. de E à une autre b.o.n. de E est une matrice orthogonale. 2. Réciproquement, soit B une b.o.n. de E, et P une matrice orthogonale. Alors il existe une unique base C telle que P soit la matrice de passage de B à C, et cette base C est une b.o.n. de E. 3. De même, si C est une b.o.n. de E, et P une matrice orthogonale, il existe une unique base B telle que P soit la matrice de passage de B à C, et cette base B est une b.o.n. de E.

Éléments de preuve. 1. Résulte de la définition. 2. Remarquer que si x et y sont deux vecteurs de coordonnées X et Y dans une b.o.n, et si φ est le psc, $\langle x, y\rangle = \varphi(X, Y)$. Justifier que ceci permet de définir une b.o.n. dont les coordonnées dans B sont les colonnes de P. 3. Appliquer ce qui précède à P^{-1} qui est encore orthogonal. □

Définition I.33 (Groupe orthogonal)**.** *On note $O_n(\mathbb{R})$, ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cet ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe orthogonal.*

Théorème I.34 (Structure de $O_n(\mathbb{R})$)**.** *L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, ce qui est cohérent avec la terminologie introduite dans la définition précédente.*

Éléments de preuve. Montrer que c'est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$; les vérifications sont simples. □

Théorème I.35 (Déterminant d'une matrice orthogonale)**.** *Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. Alors det(P) $\in \{-1, 1\}$. Plus précisément, det est un morphisme de groupe de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\{\{-1, 1\}, x\}$.*

Éléments de preuve. Appliquer le det à l'égalité $P^\top P = I_n$. □

Le noyau de ce morphisme est donc un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Définition I.36 (Groupe spécial orthogonal)**.** *Le noyau du déterminant défini sur $O_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe spécial orthogonal, et noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$. Ainsi, les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont les matrices orthogonales P telles que det(P) = 1.*

Remarque I.37. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, le sous-groupe $SO_n(\mathbb{R})$ n'est pas égal à $O(n)$ tout entier. En effet, la matrice Diag$(-1, 1, \cdots, 1)$ est dans $O(n)\backslash SO(n)$.*
Plus précisément, on peut alors montrer qu'il y a « autant » d'éléments dans $SO(n)$ que dans $O(n)\backslash SO(n)$.

Proposition I.38 (Bijection entre $SO(n)$ et $O(n)\backslash SO(n)$)**.** *Soit $P \in O(n)\backslash SO(n)$. L'application*

$$Q \mapsto PQ$$

est une bijection de $SO(n)$ dans $O(n)\backslash SO(n)$.

Définition I.39 (Matrices orthogonales directes, indirectes)**.** *Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. On dit que : - P est une matrice orthogonale positive (ou directe) si $P \in SO_n(\mathbb{R})$; - P est une matrice orthogonale négative (ou indirecte) si $P \in O_n(\mathbb{R})\backslash SO_n(\mathbb{R})$.*

Exercice I.40 (Exponentielle d'une matrice antisymétrique)**.** *Montrer que pour toute matrice antisymétrique A, $\exp(A)$ est orthogonale. On admettra que si A et B commutent, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.*

Définition I.41 (Matrices orthogonalement semblables)**.** *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 1. On dit que A et B sont orthogonalement semblables s'il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que $B = P^{-1}AP = P^TAP$. 2. On dit que A est orthogonalement diagonalisable si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale. 3. On dit que A est orthogonalement trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Exercice I.42 (Inégalités sur les coefficients d'une matrice orthogonale). *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

Exercice I.43 (Décomposition QR). *Montrer que toute matrice inversible $M \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose sous la forme $M = QR$, où $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in B_n(\mathbb{R})$, $B_n(\mathbb{R})$ étant le sous-groupe de Borel, constitué des matrices triangulaires supérieures inversibles.*

I.6 Orientation d'un espace

Définition I.44 (Orientation d'un espace). *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. 1. La relation $BRB' \iff det_B(B') > 0$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E 2. Cette relation d'équivalence possède exactement deux classes d'équivalence 3. On dira que B et B' ont même orientation si elles appartiennent à la même classe d'équivalence. 4. Une orientation de E est alors le choix arbitraire d'une de ces deux classes d'équivalence, qu'on fait généralement en se donnant une base de référence B_0. 5. Ainsi, étant donné une base de référence B_0, une base B est directe si $det_{B_0}(B) > 0$, et indirecte si $det_{B_0}(B) > 0$.*
Ainsi, orienter l'espace E consiste à choisir une base de référence B_0. Toute base de la même orientation que B_0 sera alors appelée base directe.

Proposition I.45 (Caractérisation de l'orientation pour les b.o.n.). *Soit B et B' deux b.o.n. d'un espace euclidien E. Les propositions suivantes sont équivalentes: (i) B et B' ont même orientation ; (ii) $Mat_B(B') \in SO(n)$ (iii) $det_B(B') = 1$ (iv) $det_B = det_B$.*

Définition I.46 (Produit mixte dans un espace euclidien orienté). *Soit E un espace euclidien orienté, et B une b.o.n. directe. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Le produit mixte de $(u_1, \dots, u_n)$ est défini par :*

$$[u_1, \dots, u_n] = det_B(u_1, \dots, u_n).$$

Cette définition est indépendante du choix de la b.o.n. directe B.

II. Endomorphismes autoadjoints

II.1 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème II.1 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit E un espace euclidien, et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire sur E. Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\varphi = \langle a, \cdot\rangle$. Plus précisément, $a \mapsto \varphi_a = \langle a, \cdot\rangle$ est un isomorphisme de E dans E^*.*

Définition II.2 (Adjoint d'un endomorphisme). *Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$.*
1. Pour tout $x \in E$: - l'application $y \mapsto \langle x, u(y)\rangle$ est une forme linéaire ; - il existe un unique vecteur $u^*(x) \in E$ tel que pour tout $y \in E, \langle x, u(y)\rangle = \langle u^*(x), y\rangle$.
2. L'application $u^* : x \mapsto u^*(x)$ est un endomorphisme de E.
3. L'endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ est appelé adjoint de l'endomorphisme u.

Éléments de preuve. Le premier point est une vérification élémentaire. Le second provient du théorème de représentation de Riesz. Le fait que u^* soit un endomorphisme provient de l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz, en constatant que $\lambda u^*(x) + u^*(x')$ répond au problème de la représentation de la forme linéaire $\langle \lambda x + x', \cdot\rangle$. □

Proposition II.3 (Adjoint d'une composée). *Soit E un espace euclidien, et u et v deux endomorphismes de E. Alors*

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$$