Exercice I.20 (Polynômes de Tchebychev). *(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $t \mapsto \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.*

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$: $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Montrer que cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) On définit la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k \end{cases}$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos x) = \cos(kx)$.

(d) Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in [0,n]$.

(f) Montrer que $\left(\frac{T_k}{\|T_k\|}\right)_{0\le k\le n}$ est la base obtenue de la base canonique par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

I.3 Projection orthogonale

Définition I.21 (Projeté orthogonal sur un sev). *Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $y \in E$. On dit que $z \in E$ est le projeté orthogonal de y sur F si et seulement si : (i) $z \in F$ (ii) $(y-z)\perp F$.*

Théorème I.22 (Existence du projeté orthogonal sur un sev de dimension finie). *Soit $y \in E$, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et $B = (b_1, \ldots, b_m)$ une b.o.n. de F. Alors le projeté orthogonal de y sur F existe, est unique, et vaut :*

$$z = \sum_{i=1}^{m} \langle y, b_i\rangle b_i.$$

Proposition I.23 (Description de la projection orthogonale). *Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E. L'application p qui a x associe son projeté orthogonal sur F est un projecteur de E. Plus précisément, c'est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Exercice I.24 (Condition de commutation de deux projecteurs orthogonaux). *Soit E un espace euclidien, et p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $p \circ q = q \circ p$

(ii) $p \circ q$ est un projecteur

(iii) p et q possèdent une base commune de diagonalisation

I.4 Coordonnées en base orthonormale

Théorème I.25 (Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n. et norme). *Soit E un espace euclidien, et $B = (b_1, \ldots, b_n)$ une b.o.n. de E. Soit $x, y \in E$. Alors : (i) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle b_i$, c'est-à-dire $[x]_B = \begin{pmatrix} \langle x, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n\rangle \end{pmatrix}$. (ii) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle\langle y, b_i\rangle$. (iii) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle^2$*

Ainsi, si B est une b.o.n. et si

$$X = [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad Y = [y]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sont les coordonnées de x et y dans la b.o.n. B, le produit scalaire et la norme s'expriment par les formules usuelles :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y \quad \textit{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^\top X.$$

Ces relations traduisent le fait que la matrice du produit scalaire dans une base orthonormale pour ce produit scalaire est égale à I_n.

Théorème I.26 (Matrice d'un endomorphisme relativement à une b.o.n.)**.** *Soit E un espace euclidien muni d'une b.o.n. $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Soit $u \in L(E)$. Alors :*

$$\textit{Mat}_B(u) = (\langle b_i, u(b_j)\rangle)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \langle b_1, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_1, u(b_n)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_n, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_n, u(b_n)\rangle \end{pmatrix}$$

I.5 Changements de base orthonormales, matrices orthogonales

Théorème I.27 (propriété des matrices de passage d'une b.o.n. à une autre)**.** *Soit B et C deux bases de E. Soit $P = P_B^c$ la matrice de passage de la base B à la base C. Alors :*

$$P^\top P = I_n = PP^\top, \quad \textit{donc:} \quad P^{-1} = P^\top.$$

Éléments de preuve. Utiliser la formule de changement de base pour la matrice du ps dans les bases B et C. On peut aussi le retrouver à l'aide de la description explicite de P_B^c et des expressions des $\langle c_i, c_j\rangle$ en b.o.n. B. □

Définition I.28 (Matrice orthogonale)**.** *Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que P est une matrice orthogonale si et seulement si $P^\top P = I_n$.*

Exemple I.29. *1. Dans $M_n(\mathbb{R})$, les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$*
2. La matrice I_n, la matrice $-I_n$, et plus généralement, toute matrice obtenue de I_n en changeant les signes de certains de ses coefficients diagonaux, et en permutant les colonnes.

De la définition même découle de façon immédiate :

Proposition I.30 (Inverse d'une matrice orthogonale)**.** *Soit P une matrice orthogonale. Alors P est inversible, et $P^{-1} = P^\top$.*

Une matrice orthogonale peut se caractériser également par l'orthonormalité de ses colonnes ou ses lignes :

Théorème I.31 (Caractérisation d'une matrice orthogonale par ses colonnes ou lignes)**.** *Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) P est orthogonale (ii) $P^\top$ est orthogonale (iii) Les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n \simeq M_{n,1}(\mathbb{R})$ (iv) Les lignes de P forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n \simeq M_{1,n}(\mathbb{R})$.