Exercice I.20 (Polynômes de Tchebychev). *(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $t \mapsto \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.*

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$: $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Montrer que cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) On définit la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k \end{cases}$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos x) = \cos(kx)$.

(d) Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in [0,n]$.

(f) Montrer que $\left(\frac{T_k}{\|T_k\|}\right)_{0\le k\le n}$ est la base obtenue de la base canonique par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

I.3 Projection orthogonale

Définition I.21 (Projeté orthogonal sur un sev). *Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $y \in E$. On dit que $z \in E$ est le projeté orthogonal de y sur F si et seulement si : (i) $z \in F$ (ii) $(y-z)\perp F$.*

Théorème I.22 (Existence du projeté orthogonal sur un sev de dimension finie). *Soit $y \in E$, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et $B = (b_1, \ldots, b_m)$ une b.o.n. de F. Alors le projeté orthogonal de y sur F existe, est unique, et vaut :*

$$z = \sum_{i=1}^{m} \langle y, b_i\rangle b_i.$$

Proposition I.23 (Description de la projection orthogonale). *Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E. L'application p qui a x associe son projeté orthogonal sur F est un projecteur de E. Plus précisément, c'est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Exercice I.24 (Condition de commutation de deux projecteurs orthogonaux). *Soit E un espace euclidien, et p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $p \circ q = q \circ p$

(ii) $p \circ q$ est un projecteur

(iii) p et q possèdent une base commune de diagonalisation

I.4 Coordonnées en base orthonormale

Théorème I.25 (Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n. et norme). *Soit E un espace euclidien, et $B = (b_1, \ldots, b_n)$ une b.o.n. de E. Soit $x, y \in E$. Alors : (i) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle b_i$, c'est-à-dire $[x]_B = \begin{pmatrix} \langle x, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n\rangle \end{pmatrix}$. (ii) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle\langle y, b_i\rangle$. (iii) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle^2$*