Exercice I.8 (Rang de A^TA)**.** *Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^TA)$.

Proposition I.9 (Matrice d'un produit scalaire)**.** *La matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est symétrique et inversible. La réciproque est fausse.*

Définition I.10 (Espace préhilbertien réel)**.** *Un espace préhilbertien réel $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le produit scalaire, on parlera plus simplement de l'espace préhilbertien E, au lieu de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Définition I.11 (Espace euclidien)**.** *Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*

I.2 Orthogonalité

On suppose que E est un espace euclidien. La plupart des notions se généralise au cas préhilbertien réel, mais certains propriétés peuvent être fausses en revanche. On rappelle que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si, par définition, $\langle x, y\rangle = 0$.

Définition I.12 (Famille orthogonale, orthonormale)**.** *1. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si pour tout $i \neq j$ de I, $x_i \perp x_j$. 2. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si elle est orthogonale, et que pour tout $i \in I$, $\|x_i\| = 1$.*

Une propriété important de ces familles est leur liberté :

Proposition I.13 (Liberté des familles orthogonales)**.** *1. Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. 2. Une famille orthonormale est libre.*

Le procédé de Gram-Schmidt permet, à partir d'une famille libre $(e_1, \ldots, e_n)$, de construire une famille orthonormale $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que pour tout $k \in [1, n]$

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k), \quad \text{et} \quad \langle e_k, f_k\rangle = 1.$$

En particulier, en partant d'une base d'un espace euclidien, on en déduit :

Théorème I.14 (Existence d'une base orthonormale)**.** *Soit E un espace euclidien. Alors E admet une b.o.n.*

Plus précisément, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à une base obtenue en complétant une famille orthonormale :

Théorème I.15 (Théorème de la base orthonormale incomplète)**.** *Soit E un espace euclidien. Alors toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.*

Définition I.16 (Sous-espaces orthogonaux)**.** *Les sous-espaces F et G de E sont orthogonaux si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $x \perp y$.*

Proposition I.17 (Orthogonalité et somme directe)**.** *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E, 2 à 2 orthogonaux. Alors la somme $\bigoplus_{i\in I} F_i$ est directe.*

Proposition I.18 (Supplémentaire orthogonal)**.** *Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble $F^\perp = \{y \in E,\ y \perp F\}$ est un supplémentaire de E, orthogonal à F. Il est appelé supplémentaire orthogonal de F.*

Remarque I.19. *C'est faux si E n'est pas de dimension finie (cadre préhilbertien réel au lieu d'euclidien).*

Exercice I.20 (Polynômes de Tchebychev). *(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $t \mapsto \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.*

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$: $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Montrer que cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) On définit la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k \end{cases}$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos x) = \cos(kx)$.

(d) Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in [0,n]$.

(f) Montrer que $\left(\frac{T_k}{\|T_k\|}\right)_{0\le k\le n}$ est la base obtenue de la base canonique par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

I.3 Projection orthogonale

Définition I.21 (Projeté orthogonal sur un sev). *Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $y \in E$. On dit que $z \in E$ est le projeté orthogonal de y sur F si et seulement si : (i) $z \in F$ (ii) $(y-z)\perp F$.*

Théorème I.22 (Existence du projeté orthogonal sur un sev de dimension finie). *Soit $y \in E$, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et $B = (b_1, \ldots, b_m)$ une b.o.n. de F. Alors le projeté orthogonal de y sur F existe, est unique, et vaut :*

$$z = \sum_{i=1}^{m} \langle y, b_i\rangle b_i.$$

Proposition I.23 (Description de la projection orthogonale). *Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E. L'application p qui a x associe son projeté orthogonal sur F est un projecteur de E. Plus précisément, c'est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Exercice I.24 (Condition de commutation de deux projecteurs orthogonaux). *Soit E un espace euclidien, et p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $p \circ q = q \circ p$

(ii) $p \circ q$ est un projecteur

(iii) p et q possèdent une base commune de diagonalisation

I.4 Coordonnées en base orthonormale

Théorème I.25 (Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n. et norme). *Soit E un espace euclidien, et $B = (b_1, \ldots, b_n)$ une b.o.n. de E. Soit $x, y \in E$. Alors : (i) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle b_i$, c'est-à-dire $[x]_B = \begin{pmatrix} \langle x, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n\rangle \end{pmatrix}$. (ii) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle\langle y, b_i\rangle$. (iii) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle^2$*