I. Rappels sur les espaces euclidiens

Ce survol rapide des définitions et propriétés essentielles du cours de première année ne remplace pas une révision complète et en profondeur de votre cours de première année. Il n'a pas vocation à être complet, et ne fait que réintroduire rapidement les notions que nous aurons à utiliser par la suite.

I.1 Formes bilinéaires et produit scalaire

Définition I.1 (Forme bilinéaire)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une forme bilinéaire φ sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, linéaire par rapport à chaque facteur, l'autre étant fixé, c'est-à-dire :*
(i) $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$
(ii) $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,z)$.

On rappelle la propriété de bilinéarité généralisée

Lemme I.2 (Bilinéarité généralisée)**.** *Soit φ une forme bilinéaire sur E. Soit $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et soit $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell) \in E^{k+\ell}$, et*

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_\ell) \in \mathbb{K}^{k+\ell}. \text{ Alors}$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_i \mu_j \varphi(x_i, y_j).$$

Définition I.3 (Matrice associée à une forme bilinéaire)**.** *Soit φ une forme bilinéaire sur E de dimension finie, et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors on définit la matrice de φ relativement à la base B par :*

$$Mat_B(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

Théorème I.4 (Caractérisation de $\text{Mat}_B(\varphi)$ par la relation $\varphi(x,y) = X^T M Y$)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice M est la matrice de φ relativement à la base B si et seulement si pour tout $(x,y) \in E^2$, dont les matrices colonnes coordonnées dans B sont X et Y,*

$$\varphi(x,y) = X^T M Y.$$

Exercice I.5 (Caractérisation de la matrice d'un produit scalaire)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice M est la matrice relativement à la base canonique d'un produit scalaire si et seulement si M est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.*

Proposition I.6 (Formule de changement de base)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ une forme bilinéaire. Soit B et $\mathcal{C}$ deux bases de E, et $P = P_B^{\mathcal{C}}$ la matrice de passage de B à $\mathcal{C}$. Alors*

$$Mat_C(\varphi) = P^T Mat_B(\varphi) P.$$

Définition I.7 (Produit scalaire)**.** *Un produit scalaire φ sur E est une forme bilinéaire telle que :*
(i) (positivité) : pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) \ge 0$
(ii) (caractère défini) : pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0$
(iii) (Symétrie) : pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
On note souvent $\langle x,y\rangle$ ou $\langle x|y\rangle$.
L'expression matricielle d'une forme bilinéaire s'applique aussi aux produits scalaires, et donc, en notant M la matrice du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans une base B et X et Y les vecteurs-colonne coordonnées de x et y, le produit scalaire s'exprime :

$$\langle x,y\rangle = X^T M Y.$$

Exercice I.8 (Rang de A^TA)**.** *Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^TA)$.

Proposition I.9 (Matrice d'un produit scalaire)**.** *La matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est symétrique et inversible. La réciproque est fausse.*

Définition I.10 (Espace préhilbertien réel)**.** *Un espace préhilbertien réel $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le produit scalaire, on parlera plus simplement de l'espace préhilbertien E, au lieu de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Définition I.11 (Espace euclidien)**.** *Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*

I.2 Orthogonalité

On suppose que E est un espace euclidien. La plupart des notions se généralise au cas préhilbertien réel, mais certains propriétés peuvent être fausses en revanche. On rappelle que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si, par définition, $\langle x, y\rangle = 0$.

Définition I.12 (Famille orthogonale, orthonormale)**.** *1. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si pour tout $i \neq j$ de I, $x_i \perp x_j$. 2. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si elle est orthogonale, et que pour tout $i \in I$, $\|x_i\| = 1$.*

Une propriété important de ces familles est leur liberté :

Proposition I.13 (Liberté des familles orthogonales)**.** *1. Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. 2. Une famille orthonormale est libre.*

Le procédé de Gram-Schmidt permet, à partir d'une famille libre $(e_1, \ldots, e_n)$, de construire une famille orthonormale $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que pour tout $k \in [1, n]$

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k), \quad \text{et} \quad \langle e_k, f_k\rangle = 1.$$

En particulier, en partant d'une base d'un espace euclidien, on en déduit :

Théorème I.14 (Existence d'une base orthonormale)**.** *Soit E un espace euclidien. Alors E admet une b.o.n.*

Plus précisément, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à une base obtenue en complétant une famille orthonormale :

Théorème I.15 (Théorème de la base orthonormale incomplète)**.** *Soit E un espace euclidien. Alors toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.*

Définition I.16 (Sous-espaces orthogonaux)**.** *Les sous-espaces F et G de E sont orthogonaux si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $x \perp y$.*

Proposition I.17 (Orthogonalité et somme directe)**.** *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E, 2 à 2 orthogonaux. Alors la somme $\bigoplus_{i\in I} F_i$ est directe.*

Proposition I.18 (Supplémentaire orthogonal)**.** *Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble $F^\perp = \{y \in E,\ y \perp F\}$ est un supplémentaire de E, orthogonal à F. Il est appelé supplémentaire orthogonal de F.*

Remarque I.19. *C'est faux si E n'est pas de dimension finie (cadre préhilbertien réel au lieu d'euclidien).*