2.2 Endomorphismes nilpotents

Nous avons déjà eu l'occasion de justifier que les endomorphismes nilpotents u sont caractérisés par leur polynôme minimal, égal à X^d, où d est l'indice de nilpotence de u.

Cela se traduit également sur le polynôme caractéristique, et sur les propriétés de trigonalisation. L'espace E est toujours un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n.

Théorème 2.7 (Caractérisation des endomorphismes nilpotents)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) u *est nilpotent*

(ii) u *admet un polynôme annulateur de la forme* X^k

(iii) μ_u *est de la forme* X^d*,* d *étant alors l'indice de nilpotence*

(iv) u *est trigonalisable, et* $Sp(u) = \{0\}$

(v) il existe une base B *de* E *dans laquelle* $Mat_B(u)$ *est triangulaire supérieure stricte.*

(vi) $\chi_u = X^n$*, où* $n = \dim(E)$

Corollaire 2.8 (Majoration de l'indice de nilpotence revisité)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. L'indice de nilpotence d de u vérifie $d \leq \dim(E)$.*

Exercice 2.9. *(Caractérisation topologique de la nilpotence) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à la classe de similitude de A.*

2.3 Sous-espaces caractéristiques

Nous allons maintenant obtenir une forme un peu plus précise de la trigonalisation obtenue pour les endomorphismes à polynôme caractéristique scindé. Nous allons pour cela nous ramener à des endomorphismes nilpotents grâce à une factorisation adéquate de l'espace.

Proposition 2.10 (Décomposition de E en somme de sous-espaces caractéristiques)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. On note*

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

où m_λ est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ. Alors,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u), \quad \text{où} \quad N_\lambda(u) = Ker((u - \lambda id)^{m_\lambda}).$$

Le sous-espace $N_\lambda(u)$ (parfois aussi noté $SEC_\lambda(u)$) est appelé sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ de u.

Proposition 2.11 (Endomorphismes induits sur les $N_\lambda(u)$)**.** *Avec les notations de la proposition précédentes :*

1. *Les sous-espaces caractéristiques $N_\lambda(u)$ sont stables par u;*

2. *En notant u_λ l'endomorphisme induit par u sur $N_\lambda(u)$, $u_\lambda - \lambda id$ est nilpotent.*
3. *Pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $\chi_{u_\lambda} = (X-\lambda)^{m_\lambda}$.*
4. *En particulier,* $\dim N_\lambda(u) = m_\lambda$.

Éléments de preuve. Les points 1 et 2 sont immédiats. On déduit du 2 que le polynôme caractéristique de $(u_\lambda - \lambda id)$ est $(X-\lambda)^{d_\lambda}$, où $d_\lambda = \dim N_\lambda(u)$. Utiliser la divisibilité de χ_u par χ_{u_λ}, et la décomposition de E en somme d'espaces caractéristiques pour conclure simultanément les points 3 et 4. □

Corollaire 2.12. *Soit u un endomorphisme tel que $\chi_u = \prod_{i=1}^k (X-\lambda_i)^{m_i}$.*

Alors il existe une base B telle que $Mat_B(u)$ soit diagonale par blocs, de blocs diagonaux $A_1, \dots, A_k$ vérifiant :

(i) la matrice A_i est de taille m_i;

(ii) la matrice A_i est triangulaire à coefficients diagonaux tous égaux à λ_i.

On remarquera que cette matrice est en particulier triangulaire, et cela donne une forme possible un peu plus précise de la trigonalisation de u.

Corollaire 2.13. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé $\chi_M = \prod_{i=1}^k (X-\lambda_i)^{m_i}$.*

Alors M est semblable à une matrice T diagonale par blocs, de blocs diagonaux $A_1, \dots, A_k$ vérifiant :

(i) la matrice A_i est de taille m_i;

(ii) la matrice A_i est triangulaire à coefficients diagonaux tous égaux à λ_i.

On termine cette section par un théorème, grand classique des concours, mais à la marge du programme.

Théorème 2.14 (Décomposition de Dunford, HP)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé. Alors il existe deux endomorphismes n et d de E tels que :*

(i) $u = n + d$

(ii) n *est nilpotent*

(iii) d *est diagonalisable*

(iv) $n \circ d = d \circ n$.

Évidemment, ce théorème se décline aussi en version matricielle. Le théorème de Dunford assure aussi l'unicité de cette décomposition, ainsi que le fait que cela caractérise le scindement du polynôme caractéristique.