1.11 Exemples

Exemple 1.50. *Diagonalisabilité, et le cas échéant, diagonalisation des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.51. *(Densité des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

2. Trigonalisation

Toutes les matrices ne sont donc pas diagonalisables. On peut déterminer, sur $\mathbb{C}$, des formes réduites privilégiées (sous forme de matrices diagonales par blocs du type $\lambda I + J$, où J est une matrice de Jordan), valide de façon plus générale dès que le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (réduction de Jordan). Cette décomposition n'est pas simple à obtenir (même si cela reste accessible avec les outils de classe préparatoire). Nous nous contentons d'étudier une propriété intermédiaire un peu dégradée, qui est l'existence d'une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire (c'est le cas de la réduction de Jordan). D'autres types de réduction existent, valides sous des conditions sur $\mathbb{K}$ plus générales, par exemple la décomposition de Forbenius qui donne une forme réduite diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux égaux à des « matrices compagnons » de certains polynômes. E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

2.1 Trigonalisabilité et caractérisations algébriques

Définition 2.1 (Trigonalisabilité)**.**

1. *On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe une base B de E telle que $Mat_B(u) \in \mathcal{T}^+(\mathbb{K})$.*
2. *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP \in \mathcal{T}^+(\mathbb{K})$. En notant T cette matrice, on a alors $M = PTP^{-1}$.*

Les deux définitions (vectorielle et matricielle) se ramènent l'une à l'autre, comme dans le cas de la diagonalisabilité.

Proposition 2.2 (Trigonalisabilité d'un endomorphisme versus matrice)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E*

1. *u est trigonalisable si et seulement si $Mat_B(u)$ est trigonalisable.*
2. *En particulier, M est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme $f_M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à M est trigonalisable.*

Proposition 2.3 (Caractérisation de la trigonalisabilité par stabilisation d'un drapeau)**.** *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement s'il existe une suite*

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E$$

de sous-espaces vectoriels, où $n = \dim(E)$, et vérifiant :

- *pour tout $k \in [0, n]$, $\dim(E_k) = k$ (ainsi la suite est strictement croissante).*
- *E_k est stable par u*

Une telle suite d'espaces vectoriels est parfois appelée drapeau de l'espace E.

La pratique de la trigonalisation est quelque chose de technique et compliqué, vous serez nécessairement guidé dans la démarche. En revanche, il existe une condition très simple de trigonalisabilité. Cette CNS a évidemment un analogue matriciel.

Théorème 2.4 (CNS de trigonalisabilité)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est trigonalisable ;*

(ii) *Le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé ;*

(iii) *u admet un polynôme annulateur (non nul) scindé ;*

(iv) *le polynôme minimal de u est scindé.*

Éléments de preuve.
- (i) $\implies$ (ii) : exprimer le polynôme caractéristique à partir d'une base de trigonalisation.
- (ii) $\implies$ (iii) : d'après Cayley-Hamilton
- (iii) $\implies$ (iv) : car μ_u divise alors un polynôme scindé
- (iv) $\implies$ (i) : faire une récurrence, en distinguant suivant que μ_u est constant ou non. S'il n'est pas constant, il a une racine, qui est alors une valeur propre de u. Considérer une base commençant par un vecteur propre associé.

□

Remarque 2.5. *On peut se dispenser de l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton ici, en remarquant que (ii) $\implies$ (i) peut se faire comme (iv) $\implies$ (i), et que (i) $\implies$ (iii) peut se faire directement, en considérant le polynôme P simplement scindé dont les racines sont les coefficients diagonaux d'une matrice triangulaire T représentant u, et en remarquant que $P(T)$ est strictement triangulaire supérieure. On a alors $(P(T))^n = 0$, donc P^n est un polynôme annulateur scindé de T.*

Corollaire 2.6. *Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable*

Éléments de preuve. C'est d'Alembert-Gauss □

De la même façon, toutes les propriétés qui suivent, utilisant une hypothèse de scindement du polynôme caractéristique, sont systématiquement vraies sur C.

2.2 Endomorphismes nilpotents

Nous avons déjà eu l'occasion de justifier que les endomorphismes nilpotents u sont caractérisés par leur polynôme minimal, égal à X^d, où d est l'indice de nilpotence de u.

Cela se traduit également sur le polynôme caractéristique, et sur les propriétés de trigonalisation. L'espace E est toujours un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n.

Théorème 2.7 (Caractérisation des endomorphismes nilpotents)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) u *est nilpotent*

(ii) u *admet un polynôme annulateur de la forme* X^k

(iii) μ_u *est de la forme* X^d*,* d *étant alors l'indice de nilpotence*

(iv) u *est trigonalisable, et* $Sp(u) = \{0\}$

(v) il existe une base B *de* E *dans laquelle* $Mat_B(u)$ *est triangulaire supérieure stricte.*

(vi) $\chi_u = X^n$*, où* $n = \dim(E)$

Corollaire 2.8 (Majoration de l'indice de nilpotence revisité)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. L'indice de nilpotence d de u vérifie $d \leq \dim(E)$.*

Exercice 2.9. *(Caractérisation topologique de la nilpotence) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à la classe de similitude de A.*

2.3 Sous-espaces caractéristiques

Nous allons maintenant obtenir une forme un peu plus précise de la trigonalisation obtenue pour les endomorphismes à polynôme caractéristique scindé. Nous allons pour cela nous ramener à des endomorphismes nilpotents grâce à une factorisation adéquate de l'espace.

Proposition 2.10 (Décomposition de E en somme de sous-espaces caractéristiques)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. On note*

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

où m_λ est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ. Alors,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u), \quad \text{où} \quad N_\lambda(u) = Ker((u - \lambda id)^{m_\lambda}).$$

Le sous-espace $N_\lambda(u)$ (parfois aussi noté $SEC_\lambda(u)$) est appelé sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ de u.

Proposition 2.11 (Endomorphismes induits sur les $N_\lambda(u)$)**.** *Avec les notations de la proposition précédentes :*

1. *Les sous-espaces caractéristiques $N_\lambda(u)$ sont stables par u;*