Théorème 1.35 (Cayley-Hamilton). 1. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_M est un polynôme annulateur de M.*

2. *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors χ_u est un polynôme annulateur de u.*

Éléments de preuve. Démonstration non exigible. Les deux énoncés sont évidemment équivalents. On montre le cas matriciel.

Écrire $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et $\text{Com}(XI_n - A)^T = \sum_{k=0}^{n-1} X^k C_k$.

Avec la formule de Cayley, trouver une relation matricielle reliant C_k, C_{k-1}, A et a_k. Former alors $\chi_A(A)$ par télescopage. □

Corollaire 1.36 (Relation entre χ_u et μ_u). 1. *Le polynôme minimal μ_u divise le polynôme caractéristique χ_u.*

2. *En particulier, $\deg(\mu_u) \leq n$.*

Exercice 1.37. *(Une deuxième démonstration du théorème de Cayley-Hamilton)*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T_1, \ldots, T_n$ des matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que le coefficient diagonal en position (i,i) de i soit nul. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et pour tout $k \in [0,n]$, $E_k = Vect(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que pour tout $k \in [1,n]$, et tout $X \in E_k$, $T_1 \ldots T_k X = 0$.*

2. *En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.*

1.9 Diagonalisation d'un endomorphisme, point de vue algébrique

La caractérisation de la diagonalisabilité par le polynôme caractéristique, qui est lui-même un polynôme annulateur de u, suggère qu'on peut adopter également un point de vue purement algébrique, basé sur l'étude des polynômes annulateurs de u. On rappelle qu'un polynôme simplement scindé est un polynôme sans racine multiple, ayant autant de racines que son degré (ou de façon équivalente, dont les seuls diviseurs irréductibles sont de degré 1).

Théorème 1.38 (Caractérisation de la diagonalisabilité par polynômes annulateurs). *Soit u un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est diagonalisable;*

(ii) *u admet un polynôme annulateur (non nul) simplement scindé;*

(iii) *le polynôme minimal de u est simplement scindé.*

Éléments de preuve.
- $(i) \implies (ii)$: Considérer $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(E)} (X - \lambda)$, et utiliser le décomposition de E en somme directe de ses propres.
- $(ii) \implies (iii)$: Dans ce cas, le polynôme minimal est un diviseur d'un polynôme scindé.
- $(iii) \implies (i)$: par le lemme de décomposition des noyaux.

□

Corollaire 1.39 (Polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable)**.** *u est diagonalisable si et seulement si $\mu_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)}(X - \lambda)$.*

Lemme 1.40 (Polynôme minimal d'un endomorphisme induit)**.** *Soit u un endomorphisme de E, et F un sous-espace de E stable par u. Soit $u_F \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par u sur F.*

1. *Tout polynôme annulateur de u est un polynôme annulateur de u_F.*
2. *En particulier, μ_{u_F} divise μ_u.*

Proposition 1.41 (Diagonalisabilité d'un induit)**.** *Soit u un endomorphisme diagonalisable, et F un sous-espace de E stable par u. Alors l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par u sur F est diagonalisable.*

Éléments de preuve. Le lemme implique qu'alors u_F est simplement scindé. □

On en déduit le résultat suivant, hors-programme mais archi-classique en concours.

Théorème 1.42 (Codiagonalisabilité, HP)**.** *Soit u et v deux endomorphismes de E tels que u o v = v o u. Si u et v sont diagonalisable, alors il existe une base commune B de diagonalisation (c'est-à-dire une base dont les éléments sont tous à la fois des vecteurs propres de u et des vecteurs propres de v).*

Éléments de preuve. Les $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v. L'endomorphisme induit v$_i estalorsdiagonalisable. Il$ formée de vecteurs propres de v. Faire cela pour chaque sev $E_{\lambda_i}(u)$ et concatérer toutes ces bases. □

Exercice 1.43. *À quelle condition un endomorphisme ayant une unique valeur propre est-il diagonalisable ?*

Exercice 1.44. *(Commutant d'un endomorphisme diagonalisable) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit u un endomorphisme diagonalisable de E. On pose :*

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid uv = vu\},$$

appelé commutant de u. Déterminer $\dim C(u)$ en fonction des dimensions des sous-espaces propres de u.

1.10 Diagonalisation d'une matrice

On traduit sans surprise ces définitions et propriétés dans le contexte matriciel.

Proposition 1.45 (Diagonalisabilité d'une matrice)**.** *Soit M $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- *L'endomorphisme canonique associé à M est diagonalisable;*
- *Il existe une matrice D diagonale et une matrice P $GL_n(\mathbb{K})$ telle que M = PDP^{-1}; $Mestsemblableunematric$*
- *On dit qu'une matrice vérifiant ces propriétés équivalentes est diagonalisable.*
- Éléments de preuve. (i) (ii) par la formule de changement de base. (ii) (iii) est la définition de matrices semblables. □