et de

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Multiplicité géométrique et algébrique d'une valeur propre

On donne les définitions dans le cadre d'un endomorphisme, mais cela s'adapte évidemment aussi au cas des matrices.

Définition 1.31 (Multiplicités d'une valeur propre)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in Sp(u)$*

1. *La multiplicité géométrique de λ est la dimension de $E_\lambda(u)$.*
2. *La multiplicité algébrique de λ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.*

Remarque 1.32. *Les deux notions peuvent différer.*

En revanche, on a toujours une inégalité qui est satisfaite :

Proposition 1.33 (Comparaison des multiplicités géométrique et algébrique)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique.*

En d'autres termes, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est majorée par la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Éléments de preuve. Considérer le polynôme caractéristique de $u_{E_\lambda(u)}$, l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace stable $E_\lambda(u)$. □

Faisons pour terminer un bilan des résultats obtenus pour les endomorphismes induits.

Proposition 1.34 (Multiplicités des valeurs propres d'un endomorphisme induit)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension fini, F un sev de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que F est stable par u. Alors :*

1. *$\chi_{u_F} | \chi_u$;*
2. *$Sp(u_F) \subset Sp(u)$;*
3. *pour tout $\lambda \in Sp(u_F)$, la multiplicité algébrique de λ en tant que valeur propre u_F est inférieure à sa multiplicité algébrique en tant que valeur propre de u;*
4. *pour tout $\lambda \in Sp(u_F)$, la multiplicité géométrique de λ en tant que valeur propre u_F est inférieure à sa multiplicité géométrique en tant que valeur propre de u;*

1.8 Théorème de Cayley-Hamilton

On a constaté que les polynômes annulateurs d'une matrice (ou d'un endomorphisme) ont un lien très fort avec le spectre de cette matrice, puisque le spectre est inclus dans l'ensemble des racines. On a aussi vu que les racines du polynôme caractéristique sont exactement les valeurs propres. On peut donc raisonnablement se demander si le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur. Le fait que ses racines soient des valeurs propres n'est pas suffisant pour conclure, car on n'a pas de contrôle suffisant sur la multiplicité. Si la multiplicité est trop faible (inférieure à la multiplicité dans le polynôme minimal), la réponse est négative. Mais cette situation ne peut en fait pas se produire. C'est ce qu'affirme le théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 1.35 (Cayley-Hamilton). 1. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_M est un polynôme annulateur de M.*

2. *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors χ_u est un polynôme annulateur de u.*

Éléments de preuve. Démonstration non exigible. Les deux énoncés sont évidemment équivalents. On montre le cas matriciel.

Écrire $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et $\text{Com}(XI_n - A)^T = \sum_{k=0}^{n-1} X^k C_k$.

Avec la formule de Cayley, trouver une relation matricielle reliant C_k, C_{k-1}, A et a_k. Former alors $\chi_A(A)$ par télescopage. □

Corollaire 1.36 (Relation entre χ_u et μ_u). 1. *Le polynôme minimal μ_u divise le polynôme caractéristique χ_u.*

2. *En particulier, $\deg(\mu_u) \leq n$.*

Exercice 1.37. *(Une deuxième démonstration du théorème de Cayley-Hamilton)*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T_1, \ldots, T_n$ des matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que le coefficient diagonal en position (i,i) de i soit nul. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et pour tout $k \in [0,n]$, $E_k = Vect(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que pour tout $k \in [1,n]$, et tout $X \in E_k$, $T_1 \ldots T_k X = 0$.*

2. *En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.*

1.9 Diagonalisation d'un endomorphisme, point de vue algébrique

La caractérisation de la diagonalisabilité par le polynôme caractéristique, qui est lui-même un polynôme annulateur de u, suggère qu'on peut adopter également un point de vue purement algébrique, basé sur l'étude des polynômes annulateurs de u. On rappelle qu'un polynôme simplement scindé est un polynôme sans racine multiple, ayant autant de racines que son degré (ou de façon équivalente, dont les seuls diviseurs irréductibles sont de degré 1).

Théorème 1.38 (Caractérisation de la diagonalisabilité par polynômes annulateurs). *Soit u un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est diagonalisable;*

(ii) *u admet un polynôme annulateur (non nul) simplement scindé;*

(iii) *le polynôme minimal de u est simplement scindé.*

Éléments de preuve.
- $(i) \implies (ii)$: Considérer $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(E)} (X - \lambda)$, et utiliser le décomposition de E en somme directe de ses propres.
- $(ii) \implies (iii)$: Dans ce cas, le polynôme minimal est un diviseur d'un polynôme scindé.
- $(iii) \implies (i)$: par le lemme de décomposition des noyaux.

□