1.5 Recherche de valeurs propres

On a donc essentiellement 3 méthodes pour la recherche des valeurs propres, plus ou moins efficaces selon la situation.

1. **Méthode 1 :** Résoudre l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$, en essayant de voir à quelle condition sur λ cette équation admet une solution autre que la solution triviale. En dimension infinie, sauf s'il existe un polynôme annulateur de petit degré facile à deviner, c'est la seule solution vraiment envisageable.

2. **Méthode 2 :** Rechercher un polynôme annulateur, si possible de petit degré. En dimension finie, on sait qu'il en existe un, et on montrera qu'il en existe un de degré au plus $n = \dim(E)$. En se plaçant dans le cadre matriciel, on peut trouver un polynôme annulateur en calculant les premières puissances M^k, et en trouvant une relation entre ces puissances. Les valeurs propres sont à trouver parmi les racines de ce polynôme.

   C'est parfois peu commode et hasardeux. De plus, il faut un peu d'habitude pour trouver les polynômes annulateurs après avoir calculé les premières puissances. Enfin, comme on ne devine pas toujours le polynôme minimal, on peut trouver des racines qui ne sont pas valeurs propres. Ça peut en revanche être efficace s'il y a peu de valeurs propres par rapport à la dimension, ou si le contexte fournit un polynôme annulateur naturel.

3. **Méthode 3 :** Calculer le polynôme caractéristique, par un calcul de déterminant, et chercher les racines de ce polynôme.

Méthode 1.29. *Recherche d'espaces propres*

Une fois qu'on a déterminé les valeurs propres λ, ou au moins, un ensemble fini qui contient toutes les valeurs propres, résoudre $u(x) = \lambda x$, de l'inconnue x. Si on est en dimension finie, cela se ramène à la résolution d'un système linéaire d'équations.

1.6 Exemples

Exemple 1.30. *1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ du C-ev $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et de

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Multiplicité géométrique et algébrique d'une valeur propre

On donne les définitions dans le cadre d'un endomorphisme, mais cela s'adapte évidemment aussi au cas des matrices.

Définition 1.31 (Multiplicités d'une valeur propre)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in Sp(u)$*

1. *La multiplicité géométrique de λ est la dimension de $E_\lambda(u)$.*
2. *La multiplicité algébrique de λ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.*

Remarque 1.32. *Les deux notions peuvent différer.*

En revanche, on a toujours une inégalité qui est satisfaite :

Proposition 1.33 (Comparaison des multiplicités géométrique et algébrique)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique.*

En d'autres termes, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est majorée par la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Éléments de preuve. Considérer le polynôme caractéristique de $u_{E_\lambda(u)}$, l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace stable $E_\lambda(u)$. □

Faisons pour terminer un bilan des résultats obtenus pour les endomorphismes induits.

Proposition 1.34 (Multiplicités des valeurs propres d'un endomorphisme induit)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension fini, F un sev de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que F est stable par u. Alors :*

1. *$\chi_{u_F} | \chi_u$;*
2. *$Sp(u_F) \subset Sp(u)$;*
3. *pour tout $\lambda \in Sp(u_F)$, la multiplicité algébrique de λ en tant que valeur propre u_F est inférieure à sa multiplicité algébrique en tant que valeur propre de u;*
4. *pour tout $\lambda \in Sp(u_F)$, la multiplicité géométrique de λ en tant que valeur propre u_F est inférieure à sa multiplicité géométrique en tant que valeur propre de u;*

1.8 Théorème de Cayley-Hamilton

On a constaté que les polynômes annulateurs d'une matrice (ou d'un endomorphisme) ont un lien très fort avec le spectre de cette matrice, puisque le spectre est inclus dans l'ensemble des racines. On a aussi vu que les racines du polynôme caractéristique sont exactement les valeurs propres. On peut donc raisonnablement se demander si le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur. Le fait que ses racines soient des valeurs propres n'est pas suffisant pour conclure, car on n'a pas de contrôle suffisant sur la multiplicité. Si la multiplicité est trop faible (inférieure à la multiplicité dans le polynôme minimal), la réponse est négative. Mais cette situation ne peut en fait pas se produire. C'est ce qu'affirme le théorème de Cayley-Hamilton.