## 1.5 Recherche de valeurs propres

On a donc essentiellement 3 méthodes pour la recherche des valeurs propres, plus ou moins efficaces selon la situation.

1. **Méthode 1 :** Résoudre l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$, en essayant de voir à quelle condition sur $\lambda$ cette équation admet une solution autre que la solution triviale. En dimension infinie, sauf s'il existe un polynôme annulateur de petit degré facile à deviner, c'est la seule solution vraiment envisageable.

2. **Méthode 2 :** Rechercher un polynôme annulateur, si possible de petit degré. En dimension finie, on sait qu'il en existe un, et on montrera qu'il en existe un de degré au plus $n = \dim(E)$. En se plaçant dans le cadre matriciel, on peut trouver un polynôme annulateur en calculant les premières puissances $M^k$, et en trouvant une relation entre ces puissances. Les valeurs propres sont à trouver parmi les racines de ce polynôme.

   C'est parfois peu commode et hasardeux. De plus, il faut un peu d'habitude pour trouver les polynômes annulateurs après avoir calculé les premières puissances. Enfin, comme on ne devine pas toujours le polynôme minimal, on peut trouver des racines qui ne sont pas valeurs propres. Ça peut en revanche être efficace s'il y a peu de valeurs propres par rapport à la dimension, ou si le contexte fournit un polynôme annulateur naturel.

3. **Méthode 3 :** Calculer le polynôme caractéristique, par un calcul de déterminant, et chercher les racines de ce polynôme.

**Méthode 1.29.** *Recherche d'espaces propres*

*Une fois qu'on a déterminé les valeurs propres $\lambda$, ou au moins, un ensemble fini qui contient toutes les valeurs propres, résoudre $u(x) = \lambda x$, de l'inconnue $x$. Si on est en dimension finie, cela se ramène à la résolution d'un système linéaire d'équations.*

## 1.6 Exemples

**Exemple 1.30.** *1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ du C-ev $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

*2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

*3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$