1.4 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Parfois, la résolution de l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$ peut s'avérer laborieuse et calculatoire, et la recherche d'un polynôme annulateur un peu hasardeuse. On donne dans cette section un outil qui permet également de déterminer les valeurs propres. Il s'agit du polynôme caractéristique de u, dont les racines sont les valeurs propres.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Le fait que λ soit valeur propre se traduit par le fait que $\lambda id - u$ ne soit pas bijective, c'est-à-dire que le déterminant de sa matrice relativement à une base quelconque est nul.

Or, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $XI_n - M$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$. Le déterminant ne faisant intervenir que des produits et des sommes des coefficients de la matrice, $\det(XI_n - M)$ est bien défini dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 1.19 (Polynôme caractéristique d'une matrice)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique χ_M de M est le polynôme défini par*

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M) \in \mathbb{K}[X]$$

Proposition 1.20 (Coefficients du polynôme caractéristique)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

(i) $\deg(\chi_M) = n$.

(ii) En écrivant $\chi_M = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $a_n = 1$ (donc χ_M est unitaire)

(iii) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(M)$

(iv) $a_0 = (-1)^n \det(M)$.

Ainsi, $\chi_M = X^n - \operatorname{tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$.

Éléments de preuve. Par la formule de développement, tous les termes sont de degré au plus $n-2$, sauf celui indexé par id. En effet, une permutation de Θ_n ne peut pas avoir exactement $n-1$ points fixes. On obtient donc les termes de degré n et $n-1$ en développant $(X-a_{1,1})\cdots(X-a_{n,n})$, ce qui se fait avec les relations de Viète. Le coefficient a_0 s'obtient par évaluation. □

Proposition 1.21 (Racines du polynôme caractéristique)**.**

$$\mathit{Rac}(\chi_M) = \mathit{Sp}(M).$$

Éléments de preuve. λ est racine est $\det(\lambda I_n - M) = 0$. Qu'est-ce que cela signifie sur l'inversibilité de la matrice ? □

Voici une situation dans laquelle le polynôme caractéristique est simple à calculer :

Proposition 1.22 (Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire)**.** *Soit T une matrice triangulaire, de coefficients diagramaux $t_{1,1}, \ldots, t_{n,n}$. Alors*

$$\chi_T(X) = (X - t_{1,1}) \cdots (X - t_{n,n}).$$

Ainsi, les valeurs propres de T sont les coefficients diagonaux.

Proposition 1.23 (Polynôme caractéristique de matrices semblables)**.** *Soit M et N deux matrices semblables. Alors $\chi_M = \chi_N$.*

Par conséquent, vu les deux derniers résultats obtenus, si on recherche une matrice triangulaire T semblable à une matrice M, les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de M, leur multiplicité sur la diagonale de T correspondant à leur multiplicité dans le polynôme caractéristique de M. C'est ce qu'on appelle la multiplicité algébrique d'une valeur propre. Le dernier résultat permet aussi de définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u d'un espace E de dimension finie. En effet, si B et C sont deux bases de E, $\text{Mat}_B(u)$ et $\text{Mat}_C(u)$ sont semblables.

Définition 1.24 (Polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$)**.** *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors le polynôme caractéristique de u est défini par*

$$\chi_u = \chi_{Mat_B(u)},$$

où B est une base de E. Cette définition est indépendante du choix de la base.

Les propriétés du polynôme caractéristique de u sont alors similaires à celles d'une matrice représentant u. Par exemple, comme la trace de u est également définie comme étant la trace commune des matrices représentant u dans une base quelconque, et comme le déterminant vérifie aussi cette propriété, on en déduit que

$$\chi_u(X) = X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

Exercice 1.25. *Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$*

1. *Montrer que si A est inversible, alors AB et BA ont meme polynome caracteristique.*
2. *Montrer que cette condition reste valide sans condition sur A*
3. *Dans cette question, $\mathbb{K}$ est un corps quelconque. Justifier que $A - TI_n$ est inversible dans $\text{Mat}_n(\mathbb{K}(T))$. En deduire que le resultat de la question 2 reste valide dans tout corps.*

Proposition 1.26 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit)**.** *Soit F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, et u_F l'endomorphisme induit sur F par u. Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.*

Éléments de preuve. Dans une base convenable, la matrice de u est triangulaire par bloc, l'un des blocs étant une matrice de u_F. Utiliser le calcul du déterminant de matrices triangulaires par blocs. □

Exercice 1.27. *Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que le coefficient du monoine X^{n-2} dans le polynome caracteristique de A est $\frac{1}{2}(\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2))$.*

Exercice 1.28. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

1. *Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tr(M^k) en fonction des valeurs propres de M et de leur multiplicité algébrique.*
2. *Soit r le nombre de valeurs propres distinctes de M et soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in [1, n + r - 1]$, tr$(M^k) =$ tr(N^k). Montrer que M et N ont même polynôme caractéristique.*
3. *Montrer que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in [1, n]$, tr$(N^k) = 0$.*

1.5 Recherche de valeurs propres

On a donc essentiellement 3 méthodes pour la recherche des valeurs propres, plus ou moins efficaces selon la situation.

1. **Méthode 1 :** Résoudre l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$, en essayant de voir à quelle condition sur λ cette équation admet une solution autre que la solution triviale. En dimension infinie, sauf s'il existe un polynôme annulateur de petit degré facile à deviner, c'est la seule solution vraiment envisageable.

2. **Méthode 2 :** Rechercher un polynôme annulateur, si possible de petit degré. En dimension finie, on sait qu'il en existe un, et on montrera qu'il en existe un de degré au plus $n = \dim(E)$. En se plaçant dans le cadre matriciel, on peut trouver un polynôme annulateur en calculant les premières puissances M^k, et en trouvant une relation entre ces puissances. Les valeurs propres sont à trouver parmi les racines de ce polynôme.

   C'est parfois peu commode et hasardeux. De plus, il faut un peu d'habitude pour trouver les polynômes annulateurs après avoir calculé les premières puissances. Enfin, comme on ne devine pas toujours le polynôme minimal, on peut trouver des racines qui ne sont pas valeurs propres. Ça peut en revanche être efficace s'il y a peu de valeurs propres par rapport à la dimension, ou si le contexte fournit un polynôme annulateur naturel.

3. **Méthode 3 :** Calculer le polynôme caractéristique, par un calcul de déterminant, et chercher les racines de ce polynôme.

Méthode 1.29. *Recherche d'espaces propres*

Une fois qu'on a déterminé les valeurs propres λ, ou au moins, un ensemble fini qui contient toutes les valeurs propres, résoudre $u(x) = \lambda x$, de l'inconnue x. Si on est en dimension finie, cela se ramène à la résolution d'un système linéaire d'équations.

1.6 Exemples

Exemple 1.30. *1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ du C-ev $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$