1.2 Exemples

Exemple 1.12. 1. *Quelle est la seule valeur propre possible d'un endomorphisme nilpotent ?*

2. *Déterminer les valeurs propres dans C de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à*
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Le dernier exemple suggère qu'on peut adapter toutes les définitions et propriétés au cas des matrices. Comme l'espace de travail est alors de dimension finie, on n'a pas besoin de précaution particulière pour parler du spectre. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de M si $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$, c'est-à-dire s'il existe $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$. Cela équivaut aussi à dire que la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
- L'ensemble des valeurs propres de M est noté $\text{Sp}(M)$, et est appelé spectre de M.
- Un vecteur propre associé à λ est un élément non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$, c'est-à-dire $X \in \text{Ker}(M - \lambda I_n)\backslash\{0\}$.
- Le sous-espace propre $E_\lambda(M)$ associé à la valeur propre λ est $\text{Ker}(M - \lambda I_n)$. C'est donc l'ensemble des vecteurs propres, augmenté de 0.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe, et donc en nombre au plus égal à n.
- Les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur P de M : $\text{Sp}(M) \subset \text{Rac}(P)$.
- Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme minimal : $\text{Sp}(M) = \text{Rac}(\mu_M)$.

À cela on ajoute les deux propriétés suivantes.

Proposition 1.13 (Spectre de matrices semblables)**.** *Deux matrices semblables ont même spectre.*

Éléments de preuve. Si M et N sont semblables, $M - \lambda I_n$ et $N - \lambda I_n$ le sont aussi, donc ont même rang. □

Le lien entre éléments propres d'une matrice et éléments propres d'un endomorphisme se fait via les résultats suivants.

Proposition 1.14 (Éléments propres de u et de $\text{Mat}_\mathcal{B}(u)$)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :*

1. *$Sp(u) = Sp(Mat_\mathcal{B}(u))$;*

2. *x est vecteur propre de u associé à λ si $[x]_{\mathcal{B}}$ est vecteur propre de $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ associé à λ;*
3. *Pour $\lambda \in Sp(u)$, $E_\lambda(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)) = \varphi_{\mathcal{B}}(E_\lambda(u))$, où $\varphi_{\mathcal{B}} : x \mapsto [x]_{\mathcal{B}}$.*

On fait aussi la correspondance entre polynômes de l'endomorphisme u et polynômes de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 1.15 (Polynômes d'endomorphismes versus polynômes de matrices)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E.*

1. *Pour tout $P \in \mathcal{L}(E)$, $Mat_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(Mat_{\mathcal{B}}(u))$.*
2. *En particulier, P est un polynôme annulateur de u si et seulement s'il est un polynôme annulateur de $Mat_{\mathcal{B}}(u)$.*
3. *Notamment, $\mu_u = \mu_{Mat_{\mathcal{B}}(u)}$.*

Sur les matrices, on dispose d'une opération d'extension des scalaires, consistant à voir les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$, dès lors que $\mathbb{K}'$ est un corps contenant $\mathbb{K}$. C'est notamment ce qu'il se produit lorsqu'on considère une matrice à coefficients réels comme une matrice à coefficients complexes. Dans cet exemple, on peut notamment se demander si le spectre d'une matrice réelle M reste le même selon qu'on considère M comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe. La réponse est non en général, mais une inclusion est vraie.

Exercice 1.16. *(Polynôme minimal ponctuel et endomorphismes cycliques) Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On note :*

$$I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\} \quad \textit{et} \quad I_x = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}.$$

1. *Montrer qu'il existe μ et μ_x des polynômes unitaires non nuls tels que $I = \mu\mathbb{K}[X]$ et $I_x = \mu_x\mathbb{K}[X]$. Le polynôme μ_x est appelé polynôme minimal ponctuel de u en x.*
2. *Montrer que pour tout $x \in E$, μ_x divise μ, et qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu$.*
3. *On dit qu'un endomorphisme u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = Vect(u^k(x), k \in \mathbb{N})$. Montrer que u est cyclique si et seulement si $\mu = \chi_u$.*

Proposition 1.17 (Extension du corps des coefficients)**.** *Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ deux corps tels que $\mathbb{K}$ soit un sous-corps de $\mathbb{K}'$, et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $Sp_{\mathbb{K}}(M)$ et $Sp_{\mathbb{K}'}(M)$ le spectre de M vue respectivement comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. Alors $Sp_{\mathbb{K}}(M) \subset Sp_{\mathbb{K}'}(M)$.*

Éléments de preuve. Un vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est aussi un vecteur propre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$. □

Exemple 1.18. *L'inclusion peut être stricte, comme le montre l'exemple de* $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Parfois, la résolution de l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$ peut s'avérer laborieuse et calculatoire, et la recherche d'un polynôme annulateur un peu hasardeuse. On donne dans cette section un outil qui permet également de déterminer les valeurs propres. Il s'agit du polynôme caractéristique de u, dont les racines sont les valeurs propres.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Le fait que λ soit valeur propre se traduit par le fait que $\lambda id - u$ ne soit pas bijective, c'est-à-dire que le déterminant de sa matrice relativement à une base quelconque est nul.

Or, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $XI_n - M$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$. Le déterminant ne faisant intervenir que des produits et des sommes des coefficients de la matrice, $\det(XI_n - M)$ est bien défini dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 1.19 (Polynôme caractéristique d'une matrice)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique χ_M de M est le polynôme défini par*

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M) \in \mathbb{K}[X]$$

Proposition 1.20 (Coefficients du polynôme caractéristique)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

(i) $\deg(\chi_M) = n$.

(ii) En écrivant $\chi_M = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $a_n = 1$ (donc χ_M est unitaire)

(iii) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(M)$

(iv) $a_0 = (-1)^n \det(M)$.

Ainsi, $\chi_M = X^n - \operatorname{tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$.

Éléments de preuve. Par la formule de développement, tous les termes sont de degré au plus $n-2$, sauf celui indexé par id. En effet, une permutation de Θ_n ne peut pas avoir exactement $n-1$ points fixes. On obtient donc les termes de degré n et $n-1$ en développant $(X-a_{1,1})\cdots(X-a_{n,n})$, ce qui se fait avec les relations de Viète. Le coefficient a_0 s'obtient par évaluation. □

Proposition 1.21 (Racines du polynôme caractéristique)**.**

$$\mathit{Rac}(\chi_M) = \mathit{Sp}(M).$$

Éléments de preuve. λ est racine est $\det(\lambda I_n - M) = 0$. Qu'est-ce que cela signifie sur l'inversibilité de la matrice ? □

Voici une situation dans laquelle le polynôme caractéristique est simple à calculer :

Proposition 1.22 (Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire)**.** *Soit T une matrice triangulaire, de coefficients diagramaux $t_{1,1}, \ldots, t_{n,n}$. Alors*

$$\chi_T(X) = (X - t_{1,1}) \cdots (X - t_{n,n}).$$

Ainsi, les valeurs propres de T sont les coefficients diagonaux.

Proposition 1.23 (Polynôme caractéristique de matrices semblables)**.** *Soit M et N deux matrices semblables. Alors $\chi_M = \chi_N$.*