1.2 Exemples

Exemple 1.12. 1. *Quelle est la seule valeur propre possible d'un endomorphisme nilpotent ?*

2. *Déterminer les valeurs propres dans C de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à*
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Le dernier exemple suggère qu'on peut adapter toutes les définitions et propriétés au cas des matrices. Comme l'espace de travail est alors de dimension finie, on n'a pas besoin de précaution particulière pour parler du spectre. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de M si $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$, c'est-à-dire s'il existe $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$. Cela équivaut aussi à dire que la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
- L'ensemble des valeurs propres de M est noté $\text{Sp}(M)$, et est appelé spectre de M.
- Un vecteur propre associé à λ est un élément non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$, c'est-à-dire $X \in \text{Ker}(M - \lambda I_n)\backslash\{0\}$.
- Le sous-espace propre $E_\lambda(M)$ associé à la valeur propre λ est $\text{Ker}(M - \lambda I_n)$. C'est donc l'ensemble des vecteurs propres, augmenté de 0.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe, et donc en nombre au plus égal à n.
- Les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur P de M : $\text{Sp}(M) \subset \text{Rac}(P)$.
- Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme minimal : $\text{Sp}(M) = \text{Rac}(\mu_M)$.

À cela on ajoute les deux propriétés suivantes.

Proposition 1.13 (Spectre de matrices semblables)**.** *Deux matrices semblables ont même spectre.*

Éléments de preuve. Si M et N sont semblables, $M - \lambda I_n$ et $N - \lambda I_n$ le sont aussi, donc ont même rang. □

Le lien entre éléments propres d'une matrice et éléments propres d'un endomorphisme se fait via les résultats suivants.

Proposition 1.14 (Éléments propres de u et de $\text{Mat}_\mathcal{B}(u)$)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :*

1. *$Sp(u) = Sp(Mat_\mathcal{B}(u))$;*