1.11 Exemples

Exemple 1.50. *Diagonalisabilité, et le cas échéant, diagonalisation des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.51. *(Densité des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

2. Trigonalisation

Toutes les matrices ne sont donc pas diagonalisables. On peut déterminer, sur $\mathbb{C}$, des formes réduites privilégiées (sous forme de matrices diagonales par blocs du type $\lambda I + J$, où J est une matrice de Jordan), valide de façon plus générale dès que le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (réduction de Jordan). Cette décomposition n'est pas simple à obtenir (même si cela reste accessible avec les outils de classe préparatoire). Nous nous contentons d'étudier une propriété intermédiaire un peu dégradée, qui est l'existence d'une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire (c'est le cas de la réduction de Jordan). D'autres types de réduction existent, valides sous des conditions sur $\mathbb{K}$ plus générales, par exemple la décomposition de Forbenius qui donne une forme réduite diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux égaux à des « matrices compagnons » de certains polynômes. E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

2.1 Trigonalisabilité et caractérisations algébriques

Définition 2.1 (Trigonalisabilité)**.**

1. *On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe une base B de E telle que $Mat_B(u) \in \mathcal{T}^+(\mathbb{K})$.*
2. *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP \in \mathcal{T}^+(\mathbb{K})$. En notant T cette matrice, on a alors $M = PTP^{-1}$.*

Les deux définitions (vectorielle et matricielle) se ramènent l'une à l'autre, comme dans le cas de la diagonalisabilité.

Proposition 2.2 (Trigonalisabilité d'un endomorphisme versus matrice)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E*

1. *u est trigonalisable si et seulement si $Mat_B(u)$ est trigonalisable.*
2. *En particulier, M est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme $f_M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à M est trigonalisable.*

Proposition 2.3 (Caractérisation de la trigonalisabilité par stabilisation d'un drapeau)**.** *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement s'il existe une suite*

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E$$

de sous-espaces vectoriels, où $n = \dim(E)$, et vérifiant :