Corollaire 1.39 (Polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable)**.** *u est diagonalisable si et seulement si $\mu_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)}(X - \lambda)$.*

Lemme 1.40 (Polynôme minimal d'un endomorphisme induit)**.** *Soit u un endomorphisme de E, et F un sous-espace de E stable par u. Soit $u_F \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par u sur F.*

1. *Tout polynôme annulateur de u est un polynôme annulateur de u_F.*
2. *En particulier, μ_{u_F} divise μ_u.*

Proposition 1.41 (Diagonalisabilité d'un induit)**.** *Soit u un endomorphisme diagonalisable, et F un sous-espace de E stable par u. Alors l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par u sur F est diagonalisable.*

Éléments de preuve. Le lemme implique qu'alors u_F est simplement scindé. □

On en déduit le résultat suivant, hors-programme mais archi-classique en concours.

Théorème 1.42 (Codiagonalisabilité, HP)**.** *Soit u et v deux endomorphismes de E tels que u o v = v o u. Si u et v sont diagonalisable, alors il existe une base commune B de diagonalisation (c'est-à-dire une base dont les éléments sont tous à la fois des vecteurs propres de u et des vecteurs propres de v).*

Éléments de preuve. Les $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v. L'endomorphisme induit v$_i estalorsdiagonalisable. Il$ formée de vecteurs propres de v. Faire cela pour chaque sev $E_{\lambda_i}(u)$ et concatérer toutes ces bases. □

Exercice 1.43. *À quelle condition un endomorphisme ayant une unique valeur propre est-il diagonalisable ?*

Exercice 1.44. *(Commutant d'un endomorphisme diagonalisable) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit u un endomorphisme diagonalisable de E. On pose :*

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid uv = vu\},$$

appelé commutant de u. Déterminer $\dim C(u)$ en fonction des dimensions des sous-espaces propres de u.

1.10 Diagonalisation d'une matrice

On traduit sans surprise ces définitions et propriétés dans le contexte matriciel.

Proposition 1.45 (Diagonalisabilité d'une matrice)**.** *Soit M $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- *L'endomorphisme canonique associé à M est diagonalisable;*
- *Il existe une matrice D diagonale et une matrice P $GL_n(\mathbb{K})$ telle que M = PDP^{-1}; $Mestsemblableunematric$*
- *On dit qu'une matrice vérifiant ces propriétés équivalentes est diagonalisable.*
- Éléments de preuve. (i) (ii) par la formule de changement de base. (ii) (iii) est la définition de matrices semblables. □

Proposition 1.46 (Caractérisation matricielle de la diagonalisabilité de u)**.** *Soit u* $\mathcal{L}(E)$. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) u est diagonalisable;

(ii) pour toute base B de E, $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *est diagonalisable;*

(iii) il existe une base B de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *soit diagonalisable.*

Du fait même de cette correspondance très forte entre diagonalisabilité d'un endomorphisme et diagonalisabilité d'une matrice, ainsi que d'après les propositions 9.1.15 et 9.1.16, toutes les propriétés vues dans le paragraphe précédent reste valides pour les matrices, et en particulier :

- la caractérisation géométrique 9.2.2 de la diagonalisabilité par la décomposition de E en somme directe de sous-espaces propres, ou par l'égalité entre multiplicité algébrique et géométrique des valeurs propres ;
- la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes (corollaire 9.2.3);
- la caractérisation algébrique 9.2.4 de la diagonalisabilité par les polynômes simplement scindés.
- la propriété (HP) de codiagonalisabilité.

Définition 1.47 (Diagonaliser M)**.** *Diagonaliser une matrice M consiste à expliciter une matrice P* $GL_n(\mathbb{K})$ *et une matrice diagonale D* $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ *telles que M =* PDP^{-1}.

1. **Méthode :** Diagonaliser M
   (a) Rechercher les valeurs propres de M, soit en calculant le polynôme caractéristique, soit en trouvant un polynôme annulateur simple.
   (b) Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$, résoudre le système linéaire $MX - \lambda X = 0$, et donner une base de $E_\lambda(M)$.
   (c) Justifier (ou infirmer) la diagonalisabilité par un argument de dimension ou par les multiplicités des racines d'un polynôme annulateur.
   (d) Le cas échéant, construire une base de diagonalisation par concaténation de bases des espaces propres.
   (e) Définir P comme la matrice de passage de la base canonique à cette base, et écrire la formule de changement de base pour conclure.

Exercice 1.48. *Connexité par arcs de l'ensemble des matrices diagonalisables Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est connexe par arcs. On pourra montrer qu'il est étoilé.*

Remarque 1.49. *La diagonalisation permet par exemple de calculer les puissances d'une matrice* $A = PDP^{-1}$. *En effet, par simplification des termes intermédiaires,* $A^n = PD^nP^{-1}$. *On peut donc aussi notamment calculer ainsi des exponentielles matricielles.*

1.11 Exemples

Exemple 1.50. *Diagonalisabilité, et le cas échéant, diagonalisation des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.51. *(Densité des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

2. Trigonalisation

Toutes les matrices ne sont donc pas diagonalisables. On peut déterminer, sur $\mathbb{C}$, des formes réduites privilégiées (sous forme de matrices diagonales par blocs du type $\lambda I + J$, où J est une matrice de Jordan), valide de façon plus générale dès que le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (réduction de Jordan). Cette décomposition n'est pas simple à obtenir (même si cela reste accessible avec les outils de classe préparatoire). Nous nous contentons d'étudier une propriété intermédiaire un peu dégradée, qui est l'existence d'une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire (c'est le cas de la réduction de Jordan). D'autres types de réduction existent, valides sous des conditions sur $\mathbb{K}$ plus générales, par exemple la décomposition de Forbenius qui donne une forme réduite diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux égaux à des « matrices compagnons » de certains polynômes. E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

2.1 Trigonalisabilité et caractérisations algébriques

Définition 2.1 (Trigonalisabilité)**.**

1. *On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe une base B de E telle que $Mat_B(u) \in \mathcal{T}^+(\mathbb{K})$.*
2. *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP \in \mathcal{T}^+(\mathbb{K})$. En notant T cette matrice, on a alors $M = PTP^{-1}$.*

Les deux définitions (vectorielle et matricielle) se ramènent l'une à l'autre, comme dans le cas de la diagonalisabilité.

Proposition 2.2 (Trigonalisabilité d'un endomorphisme versus matrice)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E*

1. *u est trigonalisable si et seulement si $Mat_B(u)$ est trigonalisable.*
2. *En particulier, M est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme $f_M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à M est trigonalisable.*

Proposition 2.3 (Caractérisation de la trigonalisabilité par stabilisation d'un drapeau)**.** *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement s'il existe une suite*

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E$$

de sous-espaces vectoriels, où $n = \dim(E)$, et vérifiant :