Définition 0.1 (Matrices semblables)**.** *On dit que deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PNP^{-1}$. Cela définit une relation binaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée relation de similitude.*

Cette relation est un peu plus forte que la relation d'équivalence, puisqu'on impose l'égalité des deux matrices de passage. De fait, deux matrices semblables sont équivalentes mais la réciproque est fausse.

Proposition 0.2 (La relation de similitude est une équivalence)**.** *La relation de similitude est une relation d'équivalence. Ses classes d'équivalence sont appelées classes de similitude.*

Ainsi, le problème de la réduction des endomorphismes se ramène donc à la recherche de représentants simples dans une classe de similitude donnée. Dans l'idéal, on souhaiterait donner même un représentant privilégié dans chaque classe de similitude, comme on l'avait fait avec les matrices $J_{n,p,r}$ pour les classes d'équivalence matricielle, de sorte à pouvoir classifier les classes de similitude. Comme on le verra, c'est un problème assez dur, auquel on ne répondra pas complètement cette année.

1. Éléments propres d'un endomorphisme

On suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le corps $\mathbb{K}$ est supposé être un sous-corps de $\mathbb{C}$, conformément au programme, même si la plupart des résultats de ce chapitre restent vrais sans cette condition.

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Si l'on souhaite trouver une base B telle que $\text{Mat}_B(u)$ soit diagonale, en particulier $u(b) \in \mathbb{K}b$, donc $u(\mathbb{K}b) \subset \mathbb{K}b$. Les vecteurs de cette base engendrent donc des droites stables par u.

Le problème de la diagonalisation est donc très lié à la recherche des droites stables. Réciproquement, une droite $\mathbb{K}b$ est stable si et seulement si $u(b) \in \mathbb{K}b$, donc s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(b) = \lambda b$, c'est-à-dire $(u - \lambda id)(b) = 0$.

Définition 1.1 (Valeurs propres, vecteurs propres, s.e.p.)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Une valeur propre de u est un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Ker}(u - \lambda id) \neq \{0\}$, donc tel que $u - \lambda id$ ne soit pas injectif.*

2. *Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace propre associé à λ est :*

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda id_E).$$

3. *Les éléments non nuls de $E_\lambda(u)$ sont alors appelés vecteurs propres associés à la valeur propre λ.*

Remarque 1.2.

1. *Par définition, si λ est une valeur propre, $E_\lambda(u) \neq \{0\}$, et il existe donc au moins un vecteur propre associé à λ. Une valeur propre λ se caractérise donc par le fait qu'il existe $x \in E_\lambda(0)$ tel que $u(x) = \lambda x$.*

2. *Il arrive parfois, pour des raisons techniques (éviter des discussions) d'étendre la notation $E_\lambda(u)$ au cas où λ n'est pas une valeur propre. Dans ce cas, λ est une valeur propre si $E_\lambda(u) \neq \{0\}$.*

3. *Les s.e.p. sont parfois aussi notés* $SEP_\lambda(u)$.

Exemple 1.3. *Décrire les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un projecteur.*

Définition 1.4 (Spectre)**.** *Lorsque* E *est de dimension finie, on note* $Sp(u)$ *l'ensemble des valeurs propres de* u*. L'ensemble* $Sp(u)$ *est appelé spectre de* u*.*

Proposition 1.5 (Somme directe des s.e.p.)**.** *Soit* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *des valeurs propres. Alors la somme* $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ *est directe.*

Éléments de preuve. Par le lemme de décomposition des noyaux. Peut aussi se montrer facilement directement par récurrence, c'est un bon entraînement, mais c'est un peu plus fastidieux. □

Corollaire 1.6. *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes. Alors* $(x_i)_{i\in I}$ *est libre.*

Éléments de preuve. Ce sont des vecteurs non nuls de sous-espaces vectoriels en somme directe. □

Corollaire 1.7 (Majoration du nombre de valeurs propres)**.** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n*, et* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Alors* $|Sp(u)| \leq n$*.*

Éléments de preuve. Soit par l'examen des dimensions, soit par le corollaire précédent qui donne sinon une famille libre trop grande. □

Dans le but d'étudier des propriétés de réduction simultanée, nous aurons besoin du lemme suivant :

Proposition 1.8 (Stabilité des s.e.p. de u par v commutant avec u)**.** *Soit* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *tels que* $u \circ v = v \circ u$*. Alors* v *laisse stable les sous-espaces propres de* u *(et inversement).*

Remarque 1.9. *En particulier, puisque* u *commute avec lui-même, les sous-espaces propres de* u *sont stables par* u*. Cela se comprend bien de façon directe, sans passer par ce résultat, et c'est une évidence, mais ça ne fait pas de mal que ce soit dit explicitement au moins une fois!*

Enfin, remarquons qu'une façon de restreindre la recherche des valeurs propres de u est de s'intéresser à des polynômes annulateurs :

Théorème 1.10 (Valeurs propres et racines d'un polynôme annulateur)**.** *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*.*

1. *Soit* P *un polynôme annulateur de* u*. Alors toute valeur propre est racine de* P*.*
2. *Si* u *admet un polynôme minimal* μ_u*, alors les racines de* μ_u *sont exactement les valeurs propres de* u

Éléments de preuve. 1. Par récurrence, si x est un vecteur propre associé à λ, $u^n(x) = \lambda^n \cdot x$, puis $P(u)(x) = P(\lambda) \cdot x$.

2. Pour le point 2, une inclusion est acquise. Si l'inclusion est stricte, on peut factoriser $P(u)$ par $u - \lambda$ id, où λ n'est pas une valeur propre. L'injectivité de $u - \lambda$ id permet alors de contredire la minimalité de μ_u. □

Remarque 1.11. *Lorsque* E *est de dimension finie, on peut réexprimer ces propriétés à l'aide du spectre :*

1. *Pour tout polynôme annulateur* P *de* u*,* $Sp(u) \subset Rac(P)$*;*
2. $Sp(u) = Rac(\mu_u)$*.*

1.2 Exemples

Exemple 1.12. 1. *Quelle est la seule valeur propre possible d'un endomorphisme nilpotent ?*

2. *Déterminer les valeurs propres dans C de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à*
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Le dernier exemple suggère qu'on peut adapter toutes les définitions et propriétés au cas des matrices. Comme l'espace de travail est alors de dimension finie, on n'a pas besoin de précaution particulière pour parler du spectre. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de M si $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$, c'est-à-dire s'il existe $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$. Cela équivaut aussi à dire que la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
- L'ensemble des valeurs propres de M est noté $\text{Sp}(M)$, et est appelé spectre de M.
- Un vecteur propre associé à λ est un élément non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$, c'est-à-dire $X \in \text{Ker}(M - \lambda I_n)\backslash\{0\}$.
- Le sous-espace propre $E_\lambda(M)$ associé à la valeur propre λ est $\text{Ker}(M - \lambda I_n)$. C'est donc l'ensemble des vecteurs propres, augmenté de 0.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe, et donc en nombre au plus égal à n.
- Les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur P de M : $\text{Sp}(M) \subset \text{Rac}(P)$.
- Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme minimal : $\text{Sp}(M) = \text{Rac}(\mu_M)$.

À cela on ajoute les deux propriétés suivantes.

Proposition 1.13 (Spectre de matrices semblables)**.** *Deux matrices semblables ont même spectre.*

Éléments de preuve. Si M et N sont semblables, $M - \lambda I_n$ et $N - \lambda I_n$ le sont aussi, donc ont même rang. □

Le lien entre éléments propres d'une matrice et éléments propres d'un endomorphisme se fait via les résultats suivants.

Proposition 1.14 (Éléments propres de u et de $\text{Mat}_\mathcal{B}(u)$)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :*

1. *$Sp(u) = Sp(Mat_\mathcal{B}(u))$;*