3.2 Lemme de décomposition des noyaux

On termine cette section dédiée aux polynômes d'endomorphismes et de matrices par un résultat qui sera d'une importance capitale pour les problèmes de diagonalisation, et plus généralement de réduction. Je lui donne un statut de théorème, même s'il est communément appelé lemme.

Théorème 3.12 (Lemme de décomposition des noyaux)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}^*$, et $P_1, \dots, P_r$ des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors*

$$Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u)).$$

Éléments de preuve. Par récurrence immédiate, la primalité 2 à 2 impliquant en particulier que P_k est premier avec $P_1 \dots P_{k-1}$, il suffit de le montrer lorsque $r = 2$. Pour $r = 2$, se servir d'une relation de Bézout, à la fois pour montrer l'inclusion directe, et pour montrer le caractère directe de la somme. □

Corollaire 3.13 (Décomposition de E issue d'un polynôme annulateur)**.** *Soit P un polynôme annulateur de u, tel que $P = P_1 \dots P_r$, où les P_i sont 2 à 2 premiers entre eux. Alors*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u)).$$

Exemple 3.14.

1. *Si p est un projecteur, on retrouve $E = Ker(p) \oplus Ker(p - id)$*
2. *Si s est une symétrie, on retrouve $E = Ker(s - id) \oplus Ker(s + id)$*
3. *Dans les deux exemples précédents, trouver une base B de E telle que $Mat_B(p)$ (resp. $Mat_B(s)$) soit diagonale.*

Le dernier point nous fait bien comprendre l'utilité de ce résultat dans des études de diagonalisabilité. Ainsi, on obtient par exemple le résultat important suivant (qui sera repris et complété dans le chapitre suivant) :

Théorème 3.15 (Caractérisation de la diagonalisabilité par polynômes annulateurs)**.** *Soit E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur scindé à racines simples. Alors P est diagonalisable.*

Éléments de preuve. Par le lemme de décomposition des noyaux, puis prendre une base de chaque terme de la somme directe. C'est même une équivalence, comme on le justifiera plus tard. D'où la terminologie « caractérisation ». □